Risikotheorie

0. Teil

Prof. Erika Hausenblas

Montanuniversität Leoben, Österreich

13. März 2018

Inhalt

1. Der Wahrscheinlichkeitsraum
2. Die Verteilungsfunktion und Ihre Dichte
3. Unabhängigkeit
4. Bedingte Wahrscheinlichkeit und die Formel von Bayes
   - Der bedingte Erwartungswert
5. Rekursives Filtern

Die Grundmenge Ω und Elementarereignisse

- Ω Grundmenge, ω Element
- $\omega \in \Omega$: ω ist Element von Ω

Die Grundmenge Ω und Elementarereignisse

- Ω Grundmenge, ω Element
- $\omega \in \Omega$: ω ist Element von Ω

Example

Werfen eines Würfels: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Die Grundmenge Ω und Elementarereignisse

- Ω Grundmenge, ω Element
- $\omega \in \Omega$: ω ist Element von Ω

Example

Werfen eines Würfels: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Example

Lebensdauer eines Bauteiles: $\Omega = [0, \infty)$.

Die Grundmenge Ω und Elementarereignisse

- Ω Grundmenge, ω Element
- $\omega \in \Omega$: ω ist Element von Ω

Example

Werfen eines Würfels: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Example

Lebensdauer eines Bauteiles: $\Omega = [0, \infty)$.

Example

Überprüfung von n Bauteilen ob diese defekt (=1) oder intakt (=0) sind.
$\Omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) : \omega_i = 0, 1,\ i = 1, \ldots, n\}$.

Ereignisse

Example

Werfen eines Würfels: $\Omega = \mathbb{N}$; $A = \{2; 4; 6\} = \{n \in \Omega : n \text{ ist durch 2 teilbar}\}$.

Ereignisse

Example

Werfen eines Würfels: $\Omega = \mathbb{N}$; $A = \{2; 4; 6\} = \{n \in \Omega : n$ ist durch 2 teilbar$\}$.

Example

Lebensdauer eines Bauteiles: $\Omega = [0, \infty)$; $A = \{$ das Bauteil ist innerhalb der Garantiezeit von einen halben Jahr kaputt gegangen $\}$; $A = \{$ Das Bauteil blieb ein ganzes Jahr intakt $\}$.

Ereignisse

Example

Werfen eines Würfels: $\Omega = \mathbb{N}$; $A = \{2;4;6\} = \{n \in \Omega : n$ ist durch 2 teilbar$\}$.

Example

Lebensdauer eines Bauteiles: $\Omega = [0,\infty)$; $A = \{$ das Bauteil ist innerhalb der Garantiezeit von einen halben Jahr kaputt gegangen $\}$; $A = \{$ Das Bauteil blieb ein ganzes Jahr intakt $\}$.

Example

Überprüfung von n Bauteilen ob diese defekt (=1) oder intakt (=0) sind. $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) : \omega_i = 0, 1,\ i = 1, \ldots, n\}$.
$A = \{(1,0,0,1,\cdots,0),(0,0,0,\ldots,0)\}$, $A = \{\omega \in \Omega : \sum_{j=1}^n \omega_j \le 3\}$.

Teilmengen von Ereignissen

1. $A_1 \subset A_2$ bedeutet, A_1 ist Teilmenge von A_2, d.h., aus $\omega \in A_1$ folgt $\omega \in A_2$;
2. $A_1 \supset A_2$ bedeutet, A_2 ist Teilmenge von A_1, d.h., aus $\omega \in A_2$ folgt $\omega \in A_1$;
3. $A_1 = A_2$, falls $A_1 \subset A_2$ und $A_1 \supset A_2$;

Teilmengen von Ereignissen

1. $A_1 \subset A_2$ bedeutet, A_1 ist Teilmenge von A_2, d.h., aus $\omega \in A_1$ folgt $\omega \in A_2$;
2. $A_1 \supset A_2$ bedeutet, A_2 ist Teilmenge von A_1, d.h., aus $\omega \in A_2$ folgt $\omega \in A_1$;
3. $A_1 = A_2$, falls $A_1 \subset A_2$ und $A_1 \supset A_2$;

Example

Der Würfel:: $\{\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$; Elementar–Ereignisse $\{1\}, \{2\}, \cdots, \{6\}$. Das Ereignis $A_1 = \{2\}$ tritt genau dann ein, wenn die Zahl 2 gewürfelt wird. Das Ereignis $A_2 = \{2,4,6\}$ tritt genau dann ein, wenn eine gerade Zahl gewürfelt wird. Also gilt: $A_1 \subset A_2$, d.h., wenn A_1 eintritt, dann tritt auch A_2 ein.

Teilmengen von Ereignissen

1. $A_1 \subset A_2$ bedeutet, A_1 ist Teilmenge von A_2, d.h., aus $\omega \in A_1$ folgt $\omega \in A_2$;
2. $A_1 \supset A_2$ bedeutet, A_2 ist Teilmenge von A_1, d.h., aus $\omega \in A_2$ folgt $\omega \in A_1$;
3. $A_1 = A_2$, falls $A_1 \subset A_2$ und $A_1 \supset A_2$;

Example

Der Würfel:: $\{\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$; Elementar–Ereignisse $\{1\}, \{2\}, \cdots, \{6\}$. Das Ereignis $A_1 = \{2\}$ tritt genau dann ein, wenn die Zahl 2 gewürfelt wird. Das Ereignis $A_2 = \{2,4,6\}$ tritt genau dann ein, wenn eine gerade Zahl gewürfelt wird. Also gilt: $A_1 \subset A_2$, d.h., wenn A_1 eintritt, dann tritt auch A_2 ein.

Example

Lebensdauer eines Bauteiles: $\{\Omega = [0, \infty)$; Elementar–Ereignisse $\mathcal{P}([0, \infty) =$ alle möglichen Teilmengen die mittels den Interval gebildet werden können. Z.B. $[0, \frac{1}{2}), (100, 2000) \cup [500, 3000), \ldots$. Das Ereignis $A_1 = [0, 300)$ tritt genau dann ein falls das Bauteil weniger als 300 Stunden gearbeitet hat, Das Ereignis $A_2 = [500, \infty)$ falls das Bauteil nach 500 noch intakt war.

Durchschnitt und Vereinigung von Ereignissen

Seien $A, B, C \subset \Omega$ beliebige Teilmengen. Dann gelten

- *Eindeutigkeitsgesetze:* $A \cup \emptyset = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cup \Omega = \Omega$; $A \cap \Omega = A$ (allgemein: falls $A \subset B$, dann gilt $A \cap B = A$; $A \cup B = B$);
- *de Morgansche Gesetze:* $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$; $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$;
- *Assoziativ Gesetze:*
  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $A\ (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
- *Distributiv Gesetze:*
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Das Wahrscheinlichkeitsmaß

Definition

Gegeben sei ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{F})$. Das Wahrscheinlichkeitsmaß ist eine Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P} : \mathcal{F} & \longrightarrow & [0,1], \\ A & \mapsto & \mathbb{P}(A). \end{array}$$

Für $A \in \mathcal{F}$ heißt $\mathbb{P}(A)$ Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $A \in \mathcal{F}$.

Das Wahrscheinlichkeitsmaß

Definition

Gegeben sei ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{F})$. Das Wahrscheinlichkeitsmaß ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{P} : \mathcal{F} &\longrightarrow [0,1], \\ A &\mapsto \mathbb{P}(A). \end{aligned}$$

Für $A \in \mathcal{F}$ heißt $\mathbb{P}(A)$ Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $A \in \mathcal{F}$.

Example

Der Würfel: Sei $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ und $\mathcal{F}$ sei die Menge aller möglichen Teilmengen von Ω, d.h. $\mathcal{F} = \{\Omega, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,6\}, \{1,2,3,5,6\}, \ldots, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \emptyset\}$. Das Wahrscheinlichkeitsmaß definieren wir folgendermaßen:
Sei $A \in \mathcal{F}$. Dann setzen wir $\mathbb{P}(A) = |A|/6$.

Das Wahrscheinlichkeitsmaß

Definition

Gegeben sei ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{F})$. Das Wahrscheinlichkeitsmaß ist eine Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P} : \mathcal{F} & \longrightarrow & [0,1], \\ A & \mapsto & \mathbb{P}(A). \end{array}$$

Für $A \in \mathcal{F}$ heißt $\mathbb{P}(A)$ Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $A \in \mathcal{F}$.

Lebensdauer von Bauteilen:

Sei $\Omega = [0, \infty)\}$ und $\mathcal{F}$ sei die Menge aller möglichen durch Intervalle erzeugten Teilmengen von Ω; Das Wahrscheinlichkeitsmaß definieren wir folgendermaßen: Sei $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$, $I = [a, b)$. Sei T die Zeitpunkt zu den ein bestimmtes Bauteil defekt wurde. Dann setzen wir

$$\mathrm{Prob}(T \in I) = P(I) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Definition von Zufallsvariablen

Eine Zufallsvariable ist eine Abbildung von Ω in die reellen Zahlen.

Definition von Zufallsvariablen

Eine Zufallsvariable ist eine Abbildung von Ω in die reellen Zahlen.

Example

Sei Ω die Menge aller möglichen Unfallverläufe eines Auffahrtsunfall, und $\mathcal{F}$ die Menge aller möglichen Teilmengen von Ω. Sei

$$\begin{aligned} X:\Omega &\to \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto X(\omega) = \text{Kosten die ein Unfall mit Unfallverlauf } \omega \text{ verursacht.} \end{aligned}$$

Definition von Zufallsvariablen

Eine Zufallsvariable ist eine Abbildung von Ω in die reellen Zahlen.

Example

Sei Ω die Menge aller möglichen Unfallverläufe eines Auffahrtsunfall, und $\mathcal{F}$ die Menge aller möglichen Teilmengen von Ω. Sei

$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto X(\omega) = \text{Kosten die ein Unfall mit Unfallverlauf } \omega \text{ verursacht.} \end{aligned}$$

Example

Sei Ω die Menge aller möglichen Wetterverläufe eines Tages und $\mathcal{F}$ die Menge aller möglichen Teilmengen von Ω. Sei

$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto X(\omega) = \text{Wassermenge die sich in einen Gefäss mit einen} \\ &\qquad \text{Quadratzentimeter Grundfläche bei Wetterverlauf } \omega \text{ angesammelt hat} \end{aligned}$$

Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen

Example

Sei Ω die Menge aller möglichen Unfallverläufe eines Auffahrtunfalls, und $\mathcal{F}$ die Menge aller möglichen Teilmengen von Ω. Sei

$$\begin{aligned} X:\Omega &\to \mathbb{R} \\ X(\omega) &\mapsto \text{Kosten die ein Unfall mit Unfallverlauf } \omega \text{ verursacht.} \end{aligned}$$

Für die Versicherung ist der Unfallverlauf uninteressant, wichtig sind die Kosten die ein Unfall verursacht. Bevor ein Unfall geschieht, kann man diese aber nicht vorhersagen, man kann aber aus den Erfahrungswerten die Kosten vorhersagen. Dies kann man mit einer Verteilungsfunktion modellieren.
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Kosten im Interval $[a,b]$ liegen ist

$$P([a,b]) := \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (a,b)\}\right).$$

Die Funktion

$$x \mapsto \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\}\right)$$

ist die Verteilungsfunktion von X.

Dichtefunktion einer Zufallsvariablen

Sei X eine Zufallsvariable über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und F_X die zugehörige Verteilungsfunktion, d.h.,

$$F(x) := \mathbb{P}\left(X \le x\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung:

Man kann zeigen, dass $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folgende Eigenschaften besitzt:

1. $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$;
2. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ und $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$;
3. $F_X(x) \le F_X(y)$ für $x \le y$ (F_X ist monoton steigend).

Dichtefunktion einer Zufallsvariablen

Umgekehrt, ist eine Funktion F stetig, so besitzt diese Funktion eine Dichte. Dass heißt, es gibt eine nicht negative Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass gilt

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy, \quad -\infty < a < \infty. \tag{1}$$

Umgekehrt, ist eine nichtnegative Funktion f die Ableitung von F, d.h.

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} \end{aligned}$$

und $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$, dann ist F definiert durch (1) eine Verteilungsfunktion.

Dichtefunktion einer Zufallsvariablen

Definition

Eine Zufallsvariable heißt stetig verteilt mit Dichte f, falls sich ihre Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in folgender Weise schreiben lässt:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen

Gegeben: Zufallsvariable X mit Dichtefunktion f_X, Verteilungsfunktion F_X:

Wichtige Kennwerte von Verteilungsfunktionen:

- Erwartungswert: $m_X = \mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx$;
- Varianz: $v_X = \mathbb{E}\left(X - \mathbb{E}X\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 f_X(x)\, dx$;
- Standardabweichung: $\sigma_X = \sqrt{v_X}$;
- Schiefe: $v(X) := \mathbb{E}\left[\left(\frac{X - m_x}{\sigma_X}\right)^2 3\right]$.
- Median: $\mathbb{P}\left(X \geq \mathrm{median}\right) = 0.5$;
- α–Quantile: $F^{-1}(\alpha)$;
- Modalwert: Modus x_D oder Modalwert ist bei einer empirischen Häufigkeitsverteilung der häufigst vorkommende Wert.

Unabhängigkeit

Definition

Zwei Zufallsvariable X und Y auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; \mathcal{F}; \mathbb{P})$ heißen unabhängig , wenn für beliebige Mengen A und $B \in \mathcal{F}$ gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A \text{ und } X(\omega) \in B\}) \\ = \quad & \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}) \cdot \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}). \end{aligned}$$

Unabhängigkeit

Definition

Zwei Zufallsvariable X und Y auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; \mathcal{F}; \mathbb{P})$ heißen unabhängig , wenn für beliebige Mengen A und $B \in \mathcal{F}$ gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A \text{ und } X(\omega) \in B\}) \\ = \quad & \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}) \cdot \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}). \end{aligned}$$

Beispiel Würfel:

$A = \{$ Es wurde eine 3 gewürfelt $\}$, $B = \{$ Die Zahl war ungerade $\}$.

Example

$A = \{$ erstes Bauteil explodierte $\}$, $B = \{$ das danebenliegende Bauteil nahm Schaden $\}$.

Formel von Bayes

die bedingte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A unter der Bedingung B:

$$\boxed{\mathbb{P}(A \mid B) \quad = \quad \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}. \qquad (2)}$$

Formel von Bayes

die bedingte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A unter der Bedingung B:

$$\boxed{\mathbb{P}\left(A \mid B\right) \quad = \quad \frac{\mathbb{P}\left(A \cap B\right)}{\mathbb{P}(B)}. \qquad (2)}$$

Beispiel Würfel:

$A = \{$ die gewürfelte Zahl ist 3$\}$, $B = \{$ die gewürfelte Zahl ist ungerade $\}$.

Kleine Übung zur Formel von Bayes

Vor Ihnen Stehen drei Schachteln, eine ist mit Orangen gefüllt, eine mit Äpfeln gefüllt und eine zur Hälfte mit Äpfeln und zur Hälfte mit Orangen gefüllt.
Sie gehen zur ersten Schachtel und nehmen einen Apfel heraus. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dass dies die Schachtel ist die ganz mit Äpfeln gefüllt ist oder zur Hälfte mit Äpfeln und zur Hälfte mit Orangen gefüllt ist.

Kleine Übung zur Formel von Bayes

Vor Ihnen Stehen drei Schachteln, eine ist mit Orangen gefüllt, eine mit Äpfeln gefüllt und eine zur Hälfte mit Äpfeln und zur Hälfte mit Orangen gefüllt.
Sie gehen zur ersten Schachtel und nehmen einen Apfel heraus. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dass dies die Schachtel ist die ganz mit Äpfeln gefüllt ist oder zur Hälfte mit Äpfeln und zur Hälfte mit Orangen gefüllt ist.

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit:

Sei $\{B_i : i = 1, \ldots, n\}$ eine Partition von Ω, d.h. B_i und B_j sind disjunkt für $i \neq j$ und $\cup_{i=1}^n B_i = \Omega$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \mid B_i)\mathbb{P}(B_i).$$

Nächste Übung zur Formel von Bayes

Ein Spiel

Gegeben sind 3 Türen. Hinter einer Tür steht ein Ferrari, hinter den anderen eine Ziege. Dabei wurde die Tür hinter der der Ferrari steht zufällig mit Wkeit $1/3$ ausgewürfelt. Sie wissen nicht wo der Ferrari steht, können aber eine Tür wählen. Der Spielleiter öffnet eine Tür. Dabei wählt er diese Türe aus wo kein Ferrar steht. Haben Sie auf die Tür mit den Ferrari gezeigt, würfelt er die Tür die er öffnet mit einer Münze aus.

Nächste Übung zur Formel von Bayes

Ein Spiel

Gegeben sind 3 Türen. Hinter einer Tür steht ein Ferrari, hinter den anderen eine Ziege. Dabei wurde die Tür hinter der der Ferrari steht zufällig mit Wkeit 1/3 ausgewürfelt. Sie wissen nicht wo der Ferrari steht, können aber eine Tür wählen. Der Spielleiter öffnet eine Tür. Dabei wählt er diese Türe aus wo kein Ferrar steht. Haben Sie auf die Tür mit den Ferrari gezeigt, würfelt er die Tür die er öffnet mit einer Münze aus.

Die Frage

Wechseln Sie die Tür oder nicht?

Unabhängigkeit

Man überlegt sich dass $\mathbb{P}(A \mid B)$ und $\mathbb{P}(A \cap B)$ etwas unterschiedliches bedeuten. Im allgemeinen wird

$$\mathbb{P}(A \mid B) \neq \mathbb{P}(A)$$

gelten, vgl. die vorangegangenen Beispiele. Es kann aber auch vorkommen dass

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$$

gilt. Dann ändert das Wissen über Ereignis B nicht die Wahrscheinllichkeit des Eintreten von A. Man sagt dass A und B voneinander unabhängig sind. Nach (2) gilt dann die Produktformel der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Unabhängigkeit zweier Eregnisse

Zwei Ereignisse sind A und B unabhängig falls gilt:

$$\mathbb{P}(A \cap B) \quad = \quad \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A).$$

Unabhängigkeit

Wenn A und B unabhängig sind, dann sind auch die Paare A und B^C, A^C und B, und A^C und B^C unabhängig. Drei Ereignisse A, B und C heißen unabhängig, wenn

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cap B) &= P(A)P(B), \\
\mathbb{P}(A \cap C) &= P(A)P(C), \\
\mathbb{P}(B \cap C) &= P(B)P(C),
\end{aligned}$$

sowie

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

gilt. Man fordert also mehr als die Gültigkeit der letzten Gleichung.

Unabhängigkeit

Definition

Sei $\Omega = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable und $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ eine diskrete Zufallsvariable. Das heißt es gibt eine Familie disjunkter Teilmengen $\{A_1^Y, \ldots, A_n^Y\}$ mit $\cup_{i=1}^n A_n^Y = \Omega$ und $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset \mathbb{R}$ mit

$$Y(\omega) = \sum_{i=1}^n 1_{A_1^Y}(\omega)\, y_i$$

Dann ist $\mathbb{E}[X \mid Y] : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Y-messbare Zufallsvariable definiert durch

$$\mathbb{E}[X \mid Y](\omega) = \begin{cases} \mathbb{E}\left[1_{A_1^Y}(\omega)\, X(\omega)\right] / \mathbb{P}\left(A_1^Y\right), & \text{falls } \omega \in A_1^Y, \\ \mathbb{E}\left[1_{A_2^Y}(\omega)\, X(\omega)\right] / \mathbb{P}\left(A_2^Y\right), & \text{falls } \omega \in A_2^Y, \\ \vdots \quad \vdots & \quad \vdots \\ \mathbb{E}\left[1_{A_n^Y}(\omega)\, X(\omega)\right] / \mathbb{P}\left(A_n^Y\right), & \text{falls } \omega \in A_n^Y. \end{cases}$$

Unabhängigkeit

Ein Würfel

Ein Würfel wurde geworfen. Sie wissen die Augenzahl ist gerade. Wie groß ist der Erwartungswert der Augenzahl.

Unabhängigkeit

Definition

Sei $\Omega = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine stetige Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F_X und Dichte Funktion f_X. Seien A und B zwei Ereignisse. Dann gilt

$$\mathbb{P}\left(X \in A\right) = \frac{\int_{A\cap B} f_X(s)\, ds}{\int_B f_X(s)\, ds}$$

Lebensdauer eines Bauteiles

Ein Bauteil hat eine Lebensdauerverteilung die Weibull verteilt ist mit parameter α und β. Sie wissen dass das Bauteil eine Zeiteinheit schon funktioniert. Wie groß ist die zu erwartende Lebensdauer?

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Ein Beispiel

Ein Draht wird benützt um schwere Gegenstände zu transportieren. Das Gewicht dieser Gegenstände schwankt von Tag zu Tag. Erfahrungsgemäß genügt das maximale Gewicht einer Gumbel Verteilung, d.h.

$$P(X \leq x) = \exp(-e^{-(x-b)/a}),$$

wobei X das maximale Gewicht an einen Tag ist, und $a = 156$ und $b = 910$ ist.
Kauft man so einen Draht, so ist die Qualität unterschiedlich. Der Verkäufer gibt nur die durchschnittliche Stärke und den Variationskoeffizient an. Aufgrund langjähriger Erfahrung weiß man dass die Stärke (oder maximale Traglast, benannt Y) einer Weilbullverteilung genügt, d.h.

$$P(Y = y) = \frac{c}{\alpha}\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{c-1} e^{-\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{c}}, \quad y \geq 0.$$

Die durchschnittliche maximale Traglast ist 1000 kg und der Variationskoeffizient ist 0.2. Damit gilt $c = 5.79$ und $\alpha = 1000/0.9259 \sim 1080$.
Der Seil hat jetzt ein Jahr lang durchgehalten. Soll man diesen jetzt im nächsten Jahr behalten oder einen besserer Qualität ($\mathbb{E}Y = 1200kg$ und Variationskoeffizient 0.2) kaufen ?

Rekursives Filtern

Ein Beispiel

Eine biologische Kläranlage wurde installiert. Dabei arbeiten die verschiedenen biologischen Substanzen mit verschiedener Effizienz, die täglich durch alle möglichen Randbedingungen wechseln kann. Jeden Tag wird gemessen ob die Kläranlage den Standard entspricht. Wenn das Wasser in der Kläranlage den Standard entspricht, kann das Wasser ausgelassen werden. Wir schreiben $p = \mathbb{P}(B)$ wobei B das Ereignis $\{$*Die Kläranlage erfüllt den Standard* $\}$ beschreibt. Die Kläranlage arbeitet um so effizienter um so höher p liegt. Mit Hilfe der Konstante p kann man entscheiden ob eine neue Bakteriologischen Kultur das Wasser gut reinigt oder nicht. Man hat aber nur immer den Ausgang des Ereignisses B einmal in der Woche messen, da dazu das Becken entleert werden muss.

Rekursives Filtern

- Gegeben: Ereignisse $A_1, \ldots, A_k$.
- Fragestellung: welches der Ereignisse A_i trifft zu?

Es gilt $A_i \cap A_j = \emptyset$ und $\cup_{i=1,\ldots,k} A_i = \Omega$.

Rekursives Filtern

- Gegeben: Ereignisse $A_1, \ldots, A_k$.
- Fragestellung: welches der Ereignisse A_i trifft zu?

Es gilt $A_i \cap A_j = \emptyset$ und $\cup_{i=1,\ldots,k} A_i = \Omega$.

Schritte

1. Seien $q_i^{(0)}$ die Anfangsschätzer (*A priori* Schätzer) von A_i. Haben wir keine Information, setzten wir wieder $q_i^{(0)} = \frac{1}{k}$, $i = 1, \ldots, k$.

Rekursives Filtern

- Gegeben: Ereignisse $A_1, \ldots, A_k$.
- Fragestellung: welches der Ereignisse A_i trifft zu?

Es gilt $A_i \cap A_j = \emptyset$ und $\cup_{i=1,\ldots,k} A_i = \Omega$.

Schritte

1. Seien $q_i^{(0)}$ die Anfangsschätzer (*A priori* Schätzer) von A_i. Haben wir keine Information, setzten wir wieder $q_i^{(0)} = \frac{1}{k}$, $i = 1, \ldots, k$.
2. Seien $B_1, B_2, \ldots, B_n$ eine Folge von Ereignissen, die in zeitlicher Folge eintreten, unabhängig sind und die von den Ereignissen $A_1, \ldots, A_k$ abhängen. Das heißt man kann $\mathbb{P}(B_j \mid A_i)$, $j = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, k$ berechnen.

Rekursives Filtern

- Gegeben: Ereignisse $A_1, \ldots, A_k$.
- Fragestellung: welches der Ereignisse A_i trifft zu?

Es gilt $A_i \cap A_j = \emptyset$ und $\cup_{i=1,\ldots,k} A_i = \Omega$.

Schritte

1. Seien $q_i^{(0)}$ die Anfangsschätzer (*A priori* Schätzer) von A_i. Haben wir keine Information, setzten wir wieder $q_i^{(0)} = \frac{1}{k}$, $i = 1, \ldots, k$.
2. Seien $B_1, B_2, \ldots, B_n$ eine Folge von Ereignissen, die in zeitlicher Folge eintreten, unabhängig sind und die von den Ereignissen $A_1, \ldots, A_k$ abhängen. Das heißt man kann $\mathbb{P}(B_j \mid A_i)$, $j = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, k$ berechnen.
3. Sei $q_i^{(n)}$ der *a posteriori* Schätzer von A_i. Die *Liklelihood* Funktion $L(A_i)$, bzw. $\mathbb{P}($ alle $B_1, \ldots, B_n$ treffen ein $\mid A_i)$ ist bekannt. Z.B, falls $n = 2$ ist, gilt (wegen der Unabhängigkeit von B_1 und B_2

$$\mathbb{P}\left(B_1 \cap B_2 \mid A_i\right) = \mathbb{P}\left(B_1 \mid A_i\right) \cdot \mathbb{P}\left(B_2 \mid A_i\right).$$

Rekursives Filtern

- Gegeben: Ereignisse $A_1, \ldots, A_k$.
- Fragestellung: welches der Ereignisse A_i trifft zu?

Es gilt $A_i \cap A_j = \emptyset$ und $\cup_{i=1,\ldots,k} A_i = \Omega$.

Schritte

1. Seien $q_i^{(0)}$ die Anfangsschätzer (*A priori* Schätzer) von A_i. Haben wir keine Information, setzten wir wieder $q_i^{(0)} = \frac{1}{k}$, $i = 1, \ldots, k$.
2. Seien $B_1, B_2, \ldots, B_n$ eine Folge von Ereignissen, die in zeitlicher Folge eintreten, unabhängig sind und die von den Ereignissen $A_1, \ldots, A_k$ abhängen. Das heißt man kann $\mathbb{P}(B_j \mid A_i)$, $j = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, k$ berechnen.
3. Sei $q_i^{(n)}$ der *a posteriori* Schätzer von A_i. Die *Liklelihood* Funktion $L(A_i)$, bzw. $\mathbb{P}($ alle $B_1, \ldots, B_n$ treffen ein $\mid A_i)$ ist bekannt. Z.B, falls $n = 2$ ist, gilt (wegen der Unabhängigkeit von B_1 und B_2

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \mid A_i) = \mathbb{P}(B_1 \mid A_i) \cdot \mathbb{P}(B_2 \mid A_i).$$

4. Dann gilt folgende Rekursion

$$q_i^{(n)} = \mathbb{P}(B_n \mid A_i)\, q_i^{(n-1)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Rekursives Filtern

- Gegeben: Ereignisse $A_1, \dots, A_k$.
- Fragestellung: welches der Ereignisse A_i trifft zu?

Es gilt $A_i \cap A_j = \emptyset$ und $\cup_{i=1,\dots,k} A_i = \Omega$.

Schritte

1. Seien $q_i^{(0)}$ die Anfangsschätzer (*A priori* Schätzer) von A_i. Haben wir keine Information, setzten wir wieder $q_i^{(0)} = \frac{1}{k}$, $i = 1, \dots, k$.
2. Seien $B_1, B_2, \dots, B_n$ eine Folge von Ereignissen, die in zeitlicher Folge eintreten, unabhängig sind und die von den Ereignissen $A_1, \dots, A_k$ abhängen. Das heißt man kann $\mathbb{P}(B_j \mid A_i)$, $j = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, k$ berechnen.
3. Sei $q_i^{(n)}$ der *a posteriori* Schätzer von A_i. Die *Liklelihood* Funktion $L(A_i)$, bzw. $\mathbb{P}($ alle $B_1, \dots, B_n$ treffen ein $\mid A_i)$ ist bekannt. Z.B, falls $n = 2$ ist, gilt (wegen der Unabhängigkeit von B_1 und B_2
$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \mid A_i) = \mathbb{P}(B_1 \mid A_i) \cdot \mathbb{P}(B_2 \mid A_i).$$
4. Dann gilt folgende Rekursion
$$q_i^{(n)} = \mathbb{P}(B_n \mid A_i)\, q_i^{(n-1)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
5. Gegeben B_n, berechnet man $q_1^{(n)}, \dots, q_k^{(n)}$ und nimmt dieses A_i als wahr an, wo $q_i^{(n)}$ maximal ist.