

# Risikotheorie

## 4. Teil

Prof. Erika Hausenblas

Montanuniversität Leoben, Österreich

9. Mai 2018

# Inhalt

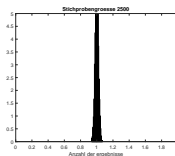
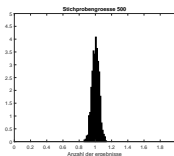
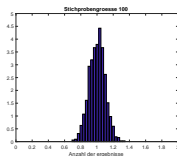
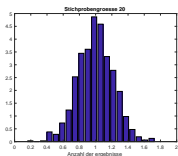
- 1 Grenzwertsätze
- 2 Extremwerttheorie
  - Extremwertverteilungen
  - Fisher–Tapett Theorem
- 3 Maximale Anziehungsbereiche

# Starke Gesetz der grossen Zahlen

## Satz

Sei  $\{X_j : j \in \mathbb{N}\}$  eine Familie von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen mit  $\mathbb{E}X_j = \nu$  und  $\mathbf{Var}(X_j) = \sigma^2 < \infty$  und  $\sigma > 0$ . Dann gilt  $\mathbb{P}$  fast überall

$$S_n := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \longrightarrow \mu.$$



# Arten der Konvergenz

## Konvergenz fast sicher

Eine Folge  $\{Z_n : n \in \mathbb{N}\}$  über einen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  konvergiert fast sicher gegen eine feste Zahl  $a \in \mathbb{R}$ , falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n \rightarrow a) = 0.$$

# Arten der Konvergenz

## Konvergenz fast sicher

Eine Folge  $\{Z_n : n \in \mathbb{N}\}$  über einen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  konvergiert fast sicher gegen eine feste Zahl  $a \in \mathbb{R}$ , falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n \rightarrow a) = 0.$$

## Konvergenz in der Verteilung

Eine Folge  $\{Z_n : n \in \mathbb{N}\}$  über einen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  konvergiert fast sicher gegen eine andere Zufallsvariable  $H$  über  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{Z_n}(x) = F_H(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

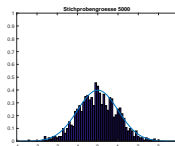
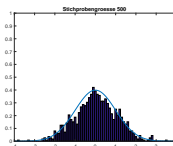
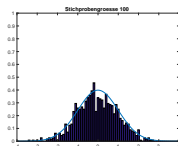
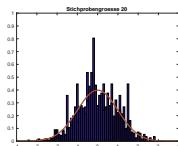
# Schwache Gesetz der großen Zahlen

## Satz

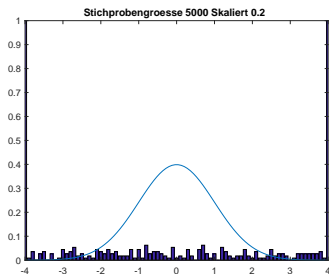
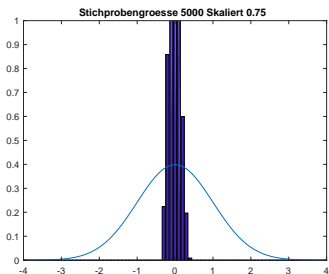
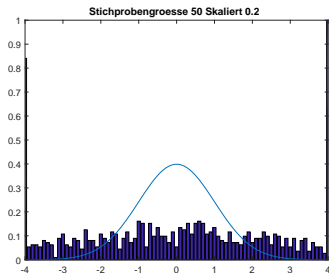
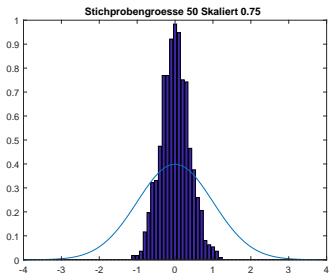
Sei  $\{X_j : j \in \mathbb{N}\}$  eine Familie von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen mit  $\mathbb{E}X_j = \nu$  und  $\mathbf{Var}(X_j) = \sigma^2 < \infty$  und  $\sigma > 0$ . Dann gilt

$$S_n^{\frac{1}{2}} := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n X_j \rightarrow H,$$

wobei  $H$  eine normalverteilte Zufallsvariable ist, mit Erwartungswert  $\nu$  und Varianz  $\sigma^2$ .



# Schwache Gesetz der großen Zahlen



# Verteilung von Extremen

## Problem

Man spricht von einer 100 Jahr Flut, falls durchschnittlich jede hundert Jahre eine Flut mit mindestens dieser Höhe passiert. Allgemein, sei  $Y$  das Maximum der Flut in einem Jahr. Gegeben ein Level  $x \geq 0$ . Ein Ereignis  $A = \{Y > x\}$  heißt  $T(x)$  Jahres Ereignis falls es durchschnittlich einmal in  $T(x)$  Jahren auftritt, d.h.

$$T(x) = \frac{1}{\mathbb{P}(Y > x)}.$$

Wird, z.B. ein Deich in den Niederlanden oder Belgien geplant, so werden die Deiche so ausgelegt, dass sie eine  $10^4$  -Jahres Flut aushalten. Man gibt sich also  $T = T(x)$  vor und ist an  $x$  interessiert. Das heißt man ist an der Quantilen Funktion für Werte sehr nahe an 1 interessiert.



# Verteilung von Extremen

## Problem

Sei  $\{X_j : j \in \mathbb{N}\}$  eine Familie von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen. Sei

$$M_n := \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

## Frage:

Was kann man über die Verteilung von  $M_n$  mit  $n$  groß aussagen?

# Verteilung von Extremen

## Beispiel

Man möchte die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass innerhalb eines Jahres ein Zugseil reißt. Man weiß dass bei einer bestimmten Last, dieses Zugseil reißen kann. Die Last an einen Tag sei eine normalverteilte Zufallsvariable. Beobachtet man z.B. die Lastenverteilung eines Jahres für jeden Tag, so erhält man eine Familie von unabhängigen normalverteilten Zufallsvariable  $\{X_n : n = 1, \dots, 365\}$ . Die Frage stellt sich jetzt, wie ist das Maximum

$$M_{365} = \max_{1 \leq n \leq 365} X_n$$

verteilt. Im allgemeinen kann man  $M_{365}$  mittels einer Extremwertverteilung approximieren.

# Verteilung von Extremen

## Problem

Sei  $\{X_j : j \in \mathbb{N}\}$  eine Familie von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen. Sei

$$M_n := \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

# Verteilung von Extremen

## Problem

Sei  $\{X_j : j \in \mathbb{N}\}$  eine Familie von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen. Sei

$$M_n := \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

## Erster Ansatz:

$$\mathbb{P}(M_n \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x) \cdots \mathbb{P}(X_n \leq x) = [F(x)]^n.$$

# Verteilung von Extremen

## Problem

Sei  $\{X_j : j \in \mathbb{N}\}$  eine Familie von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen. Sei

$$M_n := \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

## Erster Ansatz:

$$\mathbb{P}(M_n \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x) \cdots \mathbb{P}(X_n \leq x) = [F(x)]^n.$$

## Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x)^n = \begin{cases} 0 & \text{falls } F(x) < 1, \\ 1 & \text{falls } F(x) = 1. \end{cases}$$

# Verteilung von Extremen

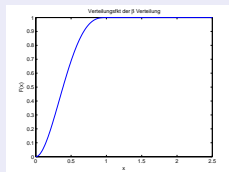
## Definition

rechten Endpunkt der Verteilungsfunktion  $F$  durch  $x_R = \sup\{t \in \mathbb{R} : F(t) < 1\}$ .

## Betaverteilung

$$F(x) = \frac{1_{[0,1]}(x)}{B(p, q)} \int_0^x u^{p-1} (1-u)^{q-1} du$$

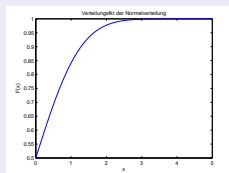
Wie schaut  $x_R$  aus?



## Normalverteilung

$$F(x) := \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Wie schaut  $x_R$  aus?



# Verteilung von Extremen

## Problem

Sei  $\{X_j : j \in \mathbb{N}\}$  eine Familie von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen. Sei

$$M_n := \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

# Verteilung von Extremen

## Problem

Sei  $\{X_j : j \in \mathbb{N}\}$  eine Familie von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen. Sei

$$M_n := \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x)^n = \begin{cases} 0 & \text{falls } F(x) < 1, \\ 1 & \text{falls } F(x) = 1. \end{cases}$$



# Verteilung von Extremen

## Problem

Sei  $\{X_j : j \in \mathbb{N}\}$  eine Familie von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen. Sei

$$M_n := \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

# Verteilung von Extremen

## Problem

Sei  $\{X_j : j \in \mathbb{N}\}$  eine Familie von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen. Sei

$$M_n := \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

## Satz

Für  $n \rightarrow \infty$  konvergiert die Zufallsvariable  $M_n$  in Wahrscheinlichkeit gegen den Wert  $x_R$ . Anders

$$\mathbb{P}(M_n \rightarrow x_R) = 1.$$

# Extremwertverteilungen

- 1 Frechet Verteilung
- 2 Gumbel Verteilung
- 3 Weibull Verteilung

# Fréchetverteilung

Eine Zufallsvariable  $X$  ist Fréchet verteilt mit Parameter  $a$ , falls für die Verteilungsfunktion  $F_X$  gilt

$$\Phi_a(x) := F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq 0, \\ \exp(-x^{-a}), & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

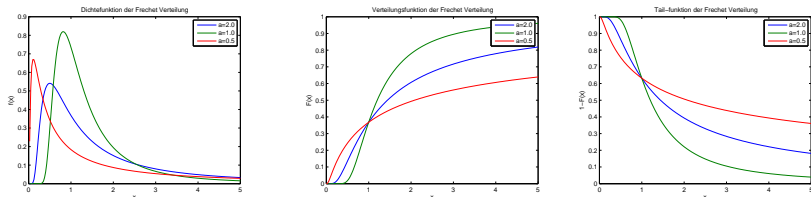


Abbildung: Die Dichte-, Verteilungs-, und Tailfunktion.

# Weibullverteilung

Eine Zufallsvariable  $X$  ist Weibull verteilt mit Parameter  $a$ , falls für die Verteilungsfunktion  $F_X$  gilt

$$\Psi_\alpha(x) := F_X(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^\alpha), & \text{falls } x \leq 0, \\ 1 & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

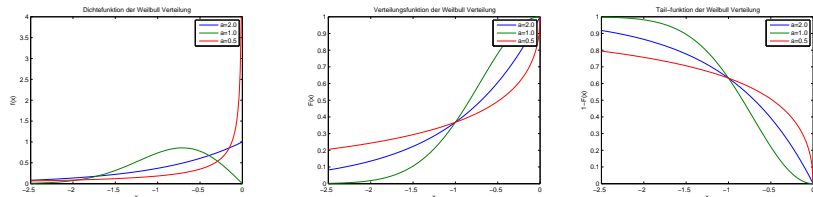


Abbildung: Die Dichte-, Verteilungs-, und Tailfunktion.

# Gumbelverteilung

Eine Zufallsvariable  $X$  ist Gumbel verteilt, falls für die Verteilungsfunktion  $F_X$  gilt

$$\Lambda(x) := F_X(x) = \exp(-e^{-x})$$

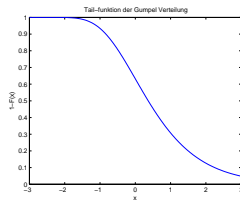
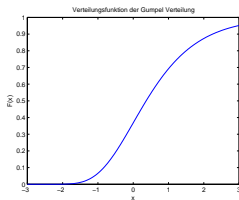
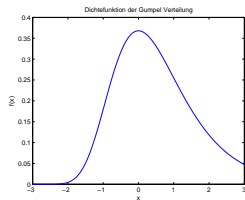


Abbildung: Die Dichte-, Verteilungs-, und Tailfunktion.

# Satz von Fisher–Tappett

## Satz

Seien  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen sodass gilt: es gibt Konstanten  $c_n > 0$  und  $d_n$  gibt mit

$$c_n^{-1} (M_n - d_n) \rightarrow H, \quad n \rightarrow \infty$$

für eine nicht degenerierte Zufallsvariable  $H$ . Dann genügt  $H$  einer sogenannten Extremwertverteilung (d.h. Gumpel, Weibull oder Fréchet Verteilung).

# Satz von Fisher–Tappett

## Beispiel

Seien  $\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$  unabhängig und exponential verteilt mit Parameter  $\lambda$ , d.h.

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad \text{für } x > 0.$$

Man kann sich z.B. vorstellen, dass die  $\{X_i : i = 1, \dots, n\}$  die Zerfallsdauer von radioaktiven Isotopen modellieren. Die *Tail*-Wahrscheinlichkeit  $\bar{F}$  ist gegeben durch  $\bar{F}(x) := 1 - F(x) = e^{-\lambda x}$ . Damit gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \frac{M_n}{\lambda} - \frac{\log n}{\lambda} < x \right) = e^{-e^{-x}} = \Lambda(x), \quad x \in [0, \infty).$$

Mit anderen Worten konvergiert die Zufallsvariable  $(M_n - \log n)/\lambda$  für  $n \rightarrow \infty$  in Verteilung gegen  $\Lambda$ .



# Satz von Fisher–Tappett

## Beispiel

Seien  $\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$  unabhängig und Pareto-verteilt mit Parameter  $a > 0$ , d.h.

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^a} & \text{für } x > 1, \\ 0 & \text{für } x \leq 1. \end{cases}$$

Also,  $\bar{F}(x) := x^{-a}$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \frac{M_n}{n^{\frac{1}{a}}} < x \right) = \mathbb{P} \left( M_n < xn^{\frac{1}{a}} \right) = \begin{cases} e^{-x^a} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

Mit anderen Worten konvergiert die Zufallsvariable  $n^{-\frac{1}{a}} M_n$  in Verteilung gegen  $\Phi_a$ .

Man kann das Ergebnis wie folgt interpretieren: Für großes  $n$  nimmt das Maximum  $M_n$  sehr große Werte auf der Skala  $n^{1/a}$  an. Reskaliert man  $M_n$  mit dem Faktor  $n^{1/a}$ , so erhält man approximativ Frechet-verteilte Werte.

# Satz von Fisher–Tappett

## Beispiel

Die  $\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$  haben die Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ 1 - (1 - x)^\alpha & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{für } x \geq 1. \end{cases}$$

wobei  $\alpha > 0$  ein Parameter ist. Also,  $\bar{F}(x) := (x_R - x)^\alpha$ ,  $x_R = 1$ ,  $x \in (0, x_R)$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( (M_n - 1) n^{\frac{1}{\alpha}} < x \right) = \begin{cases} e^{-(-x)^\alpha} & \text{für } x \leq 0, \\ 1 & \text{für } x \geq 0, \end{cases}$$

Mit anderen Worten konvergiert die Zufallsvariable  $n^{\frac{1}{\alpha}} (M_n - 1)$  in Verteilung gegen  $\Psi_\alpha$ .

Man kann das Ergebnis wie folgt interpretieren: Für großes  $n$  nähert sich das Maximum  $M_n$  dem Wert 1 von unten an. Die Differenz  $M_n - 1$  nimmt sehr kleine negative Werte auf der Skala  $n^{-1/\alpha}$  an. Reskaliert man  $(M_n - 1)$  mit dem Faktor  $n^{1/\alpha}$ , so erhält man approximativ Weibull-verteilte Werte.

# Maximale Anziehungsbereiche

## Frage:

Sei  $\{X_j : j \in \mathbb{N}\}$  eine Familie von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen. Wie kann man

- 1 eine Folge  $\{c_n : n \in \mathbb{N}\}$  von reellen Zahlen
- 2 eine Folge  $\{d_n : n \in \mathbb{N}\}$  von reellen Zahlen
- 3 eine Zufallsvariable  $H$

finden, sodass gilt

$$\frac{1}{c_n}(M_n - d_n) \rightarrow H, \quad n \rightarrow \infty.$$

# Maximale Anziehungsbereiche

## Definition

Sei  $F$  eine Verteilung der Zufallsvariablen  $X$ , dann bezeichnen wir mit  $\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \mathbb{P}(X > x)$ .

## Definition

Ist  $F$  streng monoton steigend, so ist  $F$  invertierbar und  $F^{-1}$  eindeutig definiert. Da aber  $F$  nicht unbedingt streng monoton steigen ist, aber trotzdem oft an den Inversen interessiert ist, definiert man sich das sogenannte Pseudoinverse durch

$$F^{\leftarrow}(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}} \{F(y) \geq x\}.$$

# Maximaler Anziehungsbereich der Frechetverteilung

## Definition

Eine Funktion  $L : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  heißt *langsam variierend* (slowly varying (at infinity)) falls für alle  $a > 0$ , gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(ax)}{L(x)} = 1.$$

Falls der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(ax)}{L(x)}$$

endlich, aber ungleich eins ist, heißt die Funktion *regulär variierend* (regularly varying function).

Eine Funktion  $L : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  heißt *langsam variierend* (slowly varying (at infinity)) mit index  $\alpha$  falls für alle  $a > 0$ , gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(ax)}{L(x)} = a^\alpha.$$

# Maximaler Anziehungsbereich der Frechetverteilung

## Beispiel

- Die Funktion  $f(x) = cx^\beta$ , wobei  $c > 0$ , ist ....
- Die Funktion  $f(x) = cx^\beta(\log x)^\beta$ , mit  $c > 0$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  ist ....
- Die Funktion  $f(x) = (\log x)^\beta$  mit  $\beta \in \mathbb{R}$  ist ....

# Maximaler Anziehungsbereich der Frechetverteilung

## Beispiel

- Die Funktion  $f(x) = cx^\beta$ , wobei  $c > 0$ , ist regulär variierend mit Index  $\beta$ .
- Die Funktion  $f(x) = cx^\beta(\log x)^\beta$ , mit  $c > 0$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  ist regulär variierend mit Index  $\beta$ .
- Die Funktion  $f(x) = (\log x)^\beta$  mit  $\beta \in \mathbb{R}$  ist langsam variierend.

# Maximaler Anziehungsbereich der Frechetverteilung

## Satz

Eine Verteilungsfunktion  $F$  mit rechtem Endpunkt  $x_R$  liegt im Max-Anziehungsbereich der Frechet-Verteilung mit  $\alpha > 0$  genau dann, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

- $x_R = \infty$ ;
- Die Tailfunktion  $F$  ist regulär variierend mit Index  $-\alpha$ , d.h.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F(\lambda x)}{1 - F(x)} = \lambda^{-\alpha} \quad \text{für alle } \lambda > 0.$$

Weiters gilt, für

$$c_n = F^{\leftarrow}(1 - n^{-1}) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \{F(x) \geq 1 - n^{-1}\}.$$

gilt

$$c_n^{-1} M_n \xrightarrow{d} \Phi_\alpha.$$



# Maximaler Anziehungsbereich der Frechetverteilung

## Maxima einer Cauchy verteilten Zufallsvariablen:

Sei  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  eine Familie von unabhängigen Cauchy verteilten Zufallsvariablen mit Dichtefunktion

$$f(x) = (\pi(1 + x^2))^{-1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

# Maximaler Anziehungsbereich der Frechetverteilung

## Maxima einer Cauchy verteilten Zufallsvariablen:

Sei  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  eine Familie von unabhängigen Cauchy verteilten Zufallsvariablen mit Dichtefunktion

$$f(x) = (\pi(1 + x^2))^{-1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt  $1 - F(x) \sim (\pi x)^{-1}$  und daher

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F(x)}{(\pi x)^{-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\pi^{-1} x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi x^2}{\pi(1 + x^2)} = 1.$$

Das heißt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(M_n \leq \frac{nx}{\pi}\right) &= \left(1 - \left(1 - F\left(\frac{nx}{\pi}\right)\right)\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{1}{n} \left(\frac{1}{x} + o(1)\right)\right)^n \rightarrow \exp(-x^{-1}). \end{aligned}$$

# Maximaler Anziehungsbereich der Frechetverteilung

Maxima der Pareto, Burr und stabile Verteilungen mit index  $\alpha < 2$ :

Genügt  $X$  einer der oben genannten Verteilungen, gilt  $\bar{F}(x) = \mathbb{P}(X > x) \sim Kx^{-\alpha}$  mit  $\alpha > 0$  und deswegen,  $c_n = (Kn)^{\frac{1}{\alpha}}$ .

# Maximaler Anziehungsbereich der Frechetverteilung

## Maxima der Loggamma Verteilung:

Die Dichte der Loggamma verteilung ist gegeben durch

$$f(x) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} (\ln x)^{\beta-1} x^{-\alpha-1}, \quad x \geq 0, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Eine kurze Rechnung zeigt, dass gilt

$$c_n = \left( (\Gamma(\beta))^{-1} (\ln n)^{\beta-1} n \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

# Maximaler Anziehungsbereich der Weibull Verteilung

## Definition

Eine Funktion  $L : (0, 1] \rightarrow (0, \infty)$  heißt *langsam variierend in 0* ( slowly varying (at 0)) mit Index  $\alpha > 0$  falls für alle  $\lambda > 0$ , gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{L(x\lambda)}{L(x)} = \lambda^\alpha \quad \text{für alle } \lambda > 0.$$

# Maximaler Anziehungsbereich der Weibull Verteilung

## Theorem

Eine Verteilungsfunktion  $F$  mit rechtem Endpunkt  $x_R$  liegt im Maximalen Anziehungsbereich der Weibull-Verteilung  $\Psi_\alpha$ , dann und nur dann, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

- $x_R < \infty$ ;
- Die Funktion  $f(x) = 1 - F(x_R - \frac{1}{x})$  ist regulär variierend mit Index  $-\alpha$  in 0, d.h.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F(\lambda(x_R - \frac{1}{\lambda x}))}{1 - F(x_R - \frac{1}{x})} = \lambda^{-\alpha} \quad \text{für alle } \lambda > 0.$$

## Die Folgen $c_n$ und $d_n$ :

Unter den obigen Voraussetzungen gilt

$$c_n^{-1}(M_n - d_n) \xrightarrow{d} \Phi_\alpha.$$

wobei  $d_n = x_R$  und

$$c_n = x_R - \inf_{x \in \mathbb{R}} \{F(x)\} \geq 1 - n^{-1}\}.$$

# Maximaler Anziehungsbereich der Weibull Verteilung

Gleichverteilung auf  $[0, 1]$

Hier gilt  $c_n = n^{-1}$  und  $d_n = 1$ .

# Maximaler Anziehungsbereich der Weibull Verteilung

## Gleichverteilung auf $[0, 1]$

Hier gilt  $c_n = n^{-1}$  und  $d_n = 1$ .

## Power law behaviour at $x_R$ :

Gilt  $\bar{F}(x) = K(x_R - x)^\alpha$ , für  $x_R - K^{-\frac{1}{\alpha}} \leq x \leq x_R$ , mit  $K, \alpha > 0$ , dann gilt  $c_n = (Kn)^{-\frac{1}{\alpha}}$  und  $d_n = x_R$ .



# Maximaler Anziehungsbereich der Weibull Verteilung

## Beta Verteilung:

Die Dichte der Beta Verteilung lautet

$$f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Hier gilt

$$c_n = \left( n \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b)} \right)^{-\frac{1}{b}},$$

und  $d_n = 1$ .

# Maximaler Anziehungsbereich der Gumbel Verteilung

Der Einzugsbereich der Gumbel Verteilung als Extremwertverteilung läuft von der Lognormalverteilung, der Exponential-Verteilung mit  $\bar{F}(x) \sim e^{-x}$  bis zur Normalverteilung mit  $\bar{F}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{t} e^{-t^2/2}$  für  $t \rightarrow \infty$  (Regel von l'Hospital).

# Maximaler Anziehungsbereich der Gumbel Verteilung

Der Einzugsbereich der Gumbel Verteilung als Extremwertverteilung läuft von der Lognormalverteilung, der Exponential-Verteilung mit  $\bar{F}(x) \sim e^{-x}$  bis zur Normalverteilung mit  $\bar{F}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{t} e^{-t^2/2}$  für  $t \rightarrow \infty$  (Regel von l'Hospital).

## Theorem

Eine Verteilungsfunktion  $F$  mit rechtem Endpunkt  $x_R$  liegt im Maximal Anziehungsbereich der Gumbel-Verteilung  $G(x) = e^{-e^{-x}}$  genau dann, wenn es eine positive und messbare Funktion  $g(t)$  gibt mit

$$\lim_{x \rightarrow x_R} \frac{\bar{F}(x + x g(x))}{\bar{F}(x)} = e^{-x} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

# Maximaler Anziehungsbereich der Gumbel Verteilung

Der Einzugsbereich der Gumbel Verteilung als Extremwertverteilung läuft von der Lognormalverteilung, der Exponential-Verteilung mit  $\bar{F}(x) \sim e^{-x}$  bis zur Normalverteilung mit  $\bar{F}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{t} e^{-t^2/2}$  für  $t \rightarrow \infty$  (Regel von l'Hospital).

## Theorem

Eine Verteilungsfunktion  $F$  mit rechtem Endpunkt  $x_R$  liegt im Maximal Anziehungsbereich der Gumbel-Verteilung  $G(x) = e^{-e^{-x}}$  genau dann, wenn es eine positive und messbare Funktion  $g(t)$  gibt mit

$$\lim_{x \rightarrow x_R} \frac{\bar{F}(x + x g(x))}{\bar{F}(x)} = e^{-x} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

## Remark

$x_R$  kann endlich oder unendlich sein.

# Maximaler Anziehungsbereich der Gumbel Verteilung

Um die Verteilungen näher zu charakterisieren, bzw.  $c_n$  und  $d_n$  zu finden, ist es wichtig die Funktion  $a$  näher zu charakterisieren. Dazu führen wir als erstes die *von Mises Funktion* ein.

## Definition

Sei  $f$  eine Dichte Funktion mit rechten Endpunkt  $x_R \leq \infty$ . Angenommen, es existiert eine positive stetige Funktion  $a : [0, \infty)$  und eine positive Konstante mit

$$\bar{F}(x) = c \exp \left\{ - \int_z^x \frac{1}{a(t)} dt \right\}, \quad z < x < x_R$$

dann heißt  $F$  *von Mises Funktion* und  $a$  die zu  $F$  gehörige Hilfsfunktion.

# Maximaler Anziehungsbereich der Gumbel Verteilung

In der Literatur wird auch verschiedentlich die *hazard Funktion*  $h$  durch

$$h(x) = \frac{1 - F(x)}{f(x)} = \frac{\bar{F}(x)}{f(x)} \quad \text{für } x_L < x < x_R,$$

definiert. Dabei kann man sich folgenden Zusammenhang ableiten:

$$a(x) \sim h(x).$$

Nach Definition von  $a$  gilt

$$\int_x^\infty f(y) dy = \exp\left(-\int_\mu^x \frac{1}{a(y)} dy\right).$$

Differenzieren ergibt

$$-f(x) = \exp\left(-\int_\mu^x \frac{1}{a(y)} dy\right) \frac{-1}{a(x)} \bar{F}(x) \frac{-1}{a(x)}.$$

Es gilt somit

$$a(x) = \frac{\bar{F}(x)}{f(x)} \quad \text{für } x \rightarrow \infty.$$

# Maximaler Anziehungsbereich der Weibull Verteilung

## Maxima von exponential verteilten Zufallsvariablen:

Sei  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  eine Familie von unabhängigen exponential verteilten Zufallsvariablen. Hier gilt  $\bar{F}(x) = e^{-\lambda x}$ ,  $x \geq 0$ , und  $\lambda > 0$ . Die Hilfsfunktion  $a$  lautet  $a(x) = \lambda^{-1}$ . Damit gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_n - \ln(n) \leq x) &= (\mathbb{P}(X \leq x + \ln(n)))^n \\ &= (1 - n^{-1}e^{-x})^n \rightarrow \exp(-e^{-x}).\end{aligned}$$

# Maximaler Anziehungsbereich der Weibull Verteilung

## Maxima von Weibull verteilten Zufallsvariablen:

(Beim Fisher Tippet Theorem wird die Weibullverteilung gespiegelt und das Maximum genommen, der rechte Endpunkt ist also 0. Hier wird das Maximum der Weibullverteilung selbst genommen, der rechte Endpunkt ist also  $\infty$ .)



# Maximaler Anziehungsbereich der Weibull Verteilung

## Maxima von Weibull verteilten Zufallsvariablen:

(Beim Fisher Tippet Theorem wird die Weibullverteilung gespiegelt und das Maximum genommen, der rechte Endpunkt ist also 0. Hier wird das Maximum der Weibullverteilung selbst genommen, der rechte Endpunkt ist also  $\infty$ .) Hier gilt

$$\bar{F}(x) \sim Kx^\alpha \exp(-cx^r),$$

mit  $K, c, r > 0$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Somit gilt  $\bar{F}(x) = \exp(-cx^r)$ ,  $x \geq 0$ , und  $c, r > 0$ . Die Hilfsfunktion  $a$  lautet  $a(x) = c^{-1}r^{-1}x^{1-r}$ .

# Maximaler Anziehungsbereich der Weibull Verteilung

## Maxima von Weibull verteilten Zufallsvariablen:

(Beim Fisher Tippet Theorem wird die Weibullverteilung gespiegelt und das Maximum genommen, der rechte Endpunkt ist also 0. Hier wird das Maximum der Weibullverteilung selbst genommen, der rechte Endpunkt ist also  $\infty$ .) Hier gilt

$$\bar{F}(x) \sim Kx^\alpha \exp(-cx^r),$$

mit  $K, c, r > 0$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Somit gilt  $\bar{F}(x) = \exp(-cx^r)$ ,  $x \geq 0$ , und  $c, r > 0$ . Die Hilfsfunktion  $a$  lautet  $a(x) = c^{-1}r^{-1}x^{1-r}$ . Oben eingesetzt ergibt

$$c_n = (cr)^{-1} (c^{-1} \ln n)^{\frac{1}{r}-1},$$

# Maximaler Anziehungsbereich der Weibull Verteilung

## Maxima von Weibull verteilten Zufallsvariablen:

(Beim Fisher Tippet Theorem wird die Weibullverteilung gespiegelt und das Maximum genommen, der rechte Endpunkt ist also 0. Hier wird das Maximum der Weibullverteilung selbst genommen, der rechte Endpunkt ist also  $\infty$ .) Hier gilt

$$\bar{F}(x) \sim Kx^\alpha \exp(-cx^r),$$

mit  $K, c, r > 0$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Somit gilt  $\bar{F}(x) = \exp(-cx^r)$ ,  $x \geq 0$ , und  $c, r > 0$ . Die Hilfsfunktion  $a$  lautet  $a(x) = c^{-1}r^{-1}x^{1-r}$ . Oben eingesetzt ergibt

$$c_n = (cr)^{-1} (c^{-1} \ln n)^{\frac{1}{r}-1},$$

und

$$d_n = (c^{-1} \ln n)^{\frac{1}{r}} + \frac{1}{r} (c^{-1} \ln n)^{\frac{1}{r}-1} \left\{ \frac{\alpha}{cr} (c^{-1} \ln n) + \frac{\ln(K)}{c} \right\}.$$

# Maximaler Anziehungsbereich der Weibull Verteilung

## Proposition

(Von Mises Funktionen und die Gumbel Verteilung) Angenommen  $f$  ist eine von Mises Funktion. Dann gilt

$$c_n^{-1}(M_n - d_n) \rightarrow \Gamma,$$

wobei

$$d_n = \inf_{x \in \mathbb{R}} \{F(x) \geq 1 - n^{-1}\}$$

und

$$c_n = a(d_n),$$

wobei  $a$  die Hilfsfunktion von  $f$  ist.

# Maximaler Anziehungsbereich der Weibull Verteilung

## Theorem

Seien  $X_1, X_2, \dots$  unabhängig und standard normalverteilt. Dann gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \sqrt{2 \log(n)} \left\{ M_n - \left( \sqrt{2 \log(n)} - \frac{\log \log(n) + \log(4\pi)}{2\sqrt{2 \log(n)}} \right) \right\} \leq x \right) = e^{-e^{-x}}.$$

# Konvergenzgeschwindigkeit

siehe Literatur