Risikotheorie

3. Teil

Prof. Erika Hausenblas

Montanuniversität Leoben, Österreich

6. Mai 2018

Maximaler Anziehungsbereich der Frechetverteilung

Definition

Eine Funktion $L : [0, \infty) \to [0, \infty)$ heißt *langsam variierend* (slowly varying (at infinity)) falls für alle $a > 0$, gilt

$$\lim_{x \to \infty} \frac{L(x)}{L(ax)} = 1.$$

Falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to \infty} \frac{L(x)}{L(ax)}$$

endlich, aber ungleich eins ist, heißt die Funktion *regulär variierend* (regularly varying function).
Eine Funktion $L : [0, \infty) \to [0, \infty)$ heißt *langsam variierend* (slowly varying (at infinity)) mit index α falls für alle $a > 0$, gilt

$$\lim_{x \to \infty} \frac{L(x)}{L(ax)} = a^{\alpha}.$$

Maximaler Anziehungsbereich der Frechetverteilung

Satz

Eine Verteilungsfunktion F mit rechtem Endpunkt x_R liegt im Max-Anziehungsbereich der Frechet-Verteilung mit $a > 0$ genau dann, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

- $x_R = \infty$;
- Die Tailfunktion F ist regulär variierend mit Index $-a$, d.h.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 - F(\lambda x)}{1 - F(x)} = \lambda^{-a} \quad \text{für alle } \lambda > 0.$$

Weiters gilt, für

$$c_n = F^{\leftarrow}(1 - n^{-1}) = \inf_{x\in\mathbb{R}} \{F(x) \ge 1 - n^{-1}\}.$$

gilt

$$c_n^{-1} M_n \xrightarrow{d} \Phi_\alpha.$$

Maximaler Anziehungsbereich der Weibull Verteilung

Theorem

Eine Verteilungsfunktion F mit rechtem Endpunkt x_R liegt im Maximalen Anziehungsbereich der Weibull-Verteilung Ψ_α, dann und nur dann, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

- $x_R < \infty$;
- Die Funktion $1 - F(x_R - x)$ ist regulär variierend mit Index α in 0, d.h.
  $$\lim_{x\to\infty} \frac{1-F(\lambda(x_R-x))}{1-F(x_R-x)} = \lambda^\alpha \qquad \text{für alle } \lambda > 0.$$

Die Folgen c_n und d_n:

Gilt $1 - F(x_R - x^{-1}) = x^{-\alpha}L(x)$ wobei L eine langsam variierende Funktion ist, dann gilt

$$c_n^{-1}(M_n - d_n) \xrightarrow{d} \Phi_\alpha.$$

wobei $d_n = x_R$ und

$$c_n = x_R - \inf_{x\in\mathbb{R}}\{F(x)) \geq 1 - n^{-1}\}.$$

Maximaler Anziehungsbereich der Gumbel Verteilung

Der Einzugsbereich der Gumbel Verteilung als Extremwertverteilung läuft von der Lognormalverteilung, der Exponential–Verteilung mit $\bar{F}(x) \sim e^{-x}$ bis zur Normalverteilung mit $\bar{F}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{t} e^{-t^2/2}$ für $t \to \infty$ (Regel von l'Hospital).

Maximaler Anziehungsbereich der Gumbel Verteilung

Der Einzugsbereich der Gumbel Verteilung als Extremwertverteilung läuft von der Lognormalverteilung, der Exponential–Verteilung mit $\bar{F}(x) \sim e^{-x}$ bis zur Normalverteilung mit $\bar{F}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{t} e^{-t^2/2}$ für $t \to \infty$ (Regel von l'Hospital).

Theorem

Eine Verteilungsfunktion F mit rechtem Endpunkt x_R liegt im Maximal Anziehungsbereich der Gumbel-Verteilung $G(x) = e^{-e^{-x}}$ genau dann, wenn es eine positive und messbare Funktion $g(t)$ gibt mit

$$\lim_{x \to x_R} \frac{\bar{F}(x + x\, g(x))}{\bar{F}(x)} = e^{-x} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Maximaler Anziehungsbereich der Gumbel Verteilung

Der Einzugsbereich der Gumbel Verteilung als Extremwertverteilung läuft von der Lognormalverteilung, der Exponential–Verteilung mit $\bar{F}(x) \sim e^{-x}$ bis zur Normalverteilung mit $\bar{F}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{t} e^{-t^2/2}$ für $t \to \infty$ (Regel von l'Hospital).

Theorem

Eine Verteilungsfunktion F mit rechtem Endpunkt x_R liegt im Maximal Anziehungsbereich der Gumbel-Verteilung $G(x) = e^{-e^{-x}}$ genau dann, wenn es eine positive und messbare Funktion $g(t)$ gibt mit

$$\lim_{x \to x_R} \frac{\bar{F}(x + x\, g(x))}{\bar{F}(x)} = e^{-x} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Remark

x_R kann endlich oder unendlich sein.

Maximaler Anziehungsbereiche

- Heavy tailed $\Rightarrow$ Frechet Verteilung
- Medium tailed $\Rightarrow$ Gumbel Verteilung
- Light (Short) tailed $\Rightarrow$ Weibull

Extremwerttheorie

- *Wichtig ist den Tail der Verteilung abzuschätzen.*
- *Heavy tailed ?*
- *Schätzen des Tail index.*

Statistische Methoden zum abschätzen des Tails

Statistische Methoden zum abschätzen des Tails

- Block Methode

Statistische Methoden zum abschätzen des Tails

- Block Methode
- Peak over Threshold (POT)–Methode;

Pickands–Balkema–de Haan Theorem

Definition

Die Verteilungsfunktion der verallgemeinerten Paretoverteilung wird definiert durch

$$G_{\xi,\beta,\mu}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi \frac{(x-\mu)}{\beta})^{-\frac{1}{\xi}}, & \text{falls } \xi \neq 0, \\ 1 - e^{-\frac{(x-\mu)}{\beta}}, & \text{falls } \xi = 0. \end{cases}$$

wobei $\beta > 0$ und $x \geq 0$ im Falle $\xi \geq 0$ gilt und $0 \leq x \leq -\frac{\xi}{\beta}$ falls $\xi < 0$ gilt.

Pickands–Balkema–de Haan Theorem

Verhalten im Tail

Für alle $\xi \in \mathbb{R}$ liegt eine in x_R stetige Verteilungsfunktion F in $D(H)$ genau dann, wenn

$$\lim_{u \to x_R} \sup_{0 < x \leq x_R - u} \left| F_u(x) - G_{\xi, \beta(u)}(x) \right| = 0$$

für eine geeignete positive, messbare Funktion β gilt, wobei $x_R = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}$ den rechten Endpunkt von F bezeichnet.

Pickands–Balkema–de Haan Theorem

Beispiel 1

Sei X eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parameter λ. Dann gilt

$$\lim_{u\to\infty} \sup_{0<x\leq\infty} \left| F_u(x) - G_{0,1/\lambda}(x) \right| = 0$$

Beispiel 2

Sei X eine Zufallsvariable aus den Anziehungsbereich der Frechetverteilung mit Index $-\alpha$. Dann gilt

$$\lim_{u\to\infty} \sup_{0<x\leq\infty} \left| F_u(x) - G_{1/\alpha,u/\alpha}(x) \right| = 0$$

Pickands–Balkema–de Haan Theorem

Beispiel 1

Sei X eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parameter λ. Dann gilt

$$\lim_{u\to\infty} \sup_{0<x\leq\infty} \left| F_u(x) - G_{0,1/\lambda}(x) \right| = 0$$

Beispiel 2

Sei X eine Zufallsvariable aus den Anziehungsbereich der Frechetverteilung mit Index $-\alpha$. Dann gilt

$$\lim_{u\to\infty} \sup_{0<x\leq\infty} \left| F_u(x) - G_{1/\alpha,u/\alpha}(x) \right| = 0$$

Beispiel 3

Sei X eine standard normalverteilte Zufallsvariable. Dann gilt

$$\lim_{u\to\infty} \sup_{0<x\leq\infty} \left| F_u(x) - G_{0,\frac{1}{u}}(x) \right| = 0$$

POT Methode

Definition

Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F. Die Exzess-Verteilungsfunktion von X bzw. F oberhalb des Schwellenwerts u wird definiert durch

$$F_u(x) = \mathbb{P}\left(X - u \leq x \mid X > u\right) = \frac{F(x+u) - F(u)}{1 - F(u)}$$

für $x \geq 0$ und festes $u < x_R$, wobei $x_R = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\} \leq \infty$ den rechten Endpunkt von F bezeichnet.

POT Methode

Aufgabe

Gegeben ist eine Stichprobe $\{x_1, \ldots, x_n\}$ einer Grundgesamtheit die Verteilungsfunktion F hat. Zu finden ist die Wahrscheinlichkeit von $F(x)$ für x sehr gross (bzw. das q Quantil für q nahe 1, i.e. $y = F^{\leftarrow}(q)$).

POT Methode

Aufgabe

Gegeben ist eine Stichprobe $\{x_1, \dots, x_n\}$ einer Grundgesamtheit die Verteilungsfunktion F hat. Zu finden ist die Wahrscheinlichkeit von $F(x)$ für x sehr gross (bzw. das q Quantil für q nahe 1, i.e. $y = F^{\leftarrow}(q)$).

Definition

Die *Mean excess function* (MeF) einer Zufallsvariablen ist gegeben durch

$$e(u) \quad = \quad \mathbb{E}\left[X - u \mid X > u\right].$$

POT Methode

Aufgabe

Gegeben ist eine Stichprobe $\{x_1, \ldots, x_n\}$ einer Grundgesamtheit die Verteilungsfunktion F hat. Zu finden ist die Wahrscheinlichkeit von $F(x)$ für x sehr gross (bzw. das q Quantil für q nahe 1, i.e. $y = F^{\leftarrow}(q)$).

Definition

Die *Mean excess function* (MeF) einer Zufallsvariablen ist gegeben durch

$$e(u) \quad = \quad \mathbb{E}\left[X - u \mid X > u\right].$$

Aufgabe

Berechnen Sie die Mean Excess Funktion der Pareto Verteilung.

Mean Excess Funktion

Einige Beispiele:

- Die Mean Excess Funktion der der Exponential Verteilung (Verallgemeinerten Paretoverteilung mit $\xi = 0$ und $\nu = 0$) lautet
$$e(u) = 1, \quad u > 0$$
- die Mean Excess Funktion der Pareto verteilung mit $\xi > 1$ und $\nu = 0$ lautet
$$e(u) = \frac{u}{\xi - 1}, \quad u > 1$$
- die Mean Excess Funktion der Beta Verteilung lautet
$$e(u) = \frac{u}{\xi - 1}, \quad -1 \leq u \leq 0,$$
- die Mean Excess Funktion Gumpel Verteilung
$$e(u) = \frac{1 + \xi u}{1 - \xi}, \quad \begin{cases} 0 < u \text{ falls } 0 \leq \xi < 1, \\ 0 < u < -1/\xi, \text{ falls } \xi < 0. \end{cases}$$

Empirische Mean Excess Funktion

Gegeben:

Eine Stichprobe $\{X_1, \ldots, X_n\}$.

Emprische Mean Excess Funktion

Sei

$$N_u = \#\{i : 1 \leq i \leq n : X_i > u\}$$

die Anzahl der Überschreitungen von u durch X_i, $i = 1 \ldots n$.
Die empirische durchschnittliche Exzess Funktion ist gegeben durch

$$\hat{e}_n(u) = \frac{1}{N_u} \sum_{i=1}^{n} (X_i - u) 1_{\{X_i > u\}}.$$

Wahl des Schwellenwertes:

- u_0 sollte so gross gewählt sein, dass der Plot $(e_n(X_i), X_i)$ für $u > u_0$ (annähernd) linear ist
- Es sollen noch genug Daten übrig sein.

Hill Schätzer ($\xi > 0$):

Definition

Sei $\{X_1, \ldots, X_n\}$ und $\{X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}\}$ die geordnete Stichprobe, d.h. es gilt $X_{(i-1)} \leq X_{(i)}$ für alle $i = 2, \ldots, n$. Dann ist der Hill Schätzer von $\frac{1}{\xi} = \frac{1}{\alpha}$ der k ten Ordnung gegeben durch

$$H_{k,n} := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \log \left(\frac{X_{(i)}}{X_{(k+1)}} \right).$$

Hill Schätzer ($\xi > 0$):

Definition

Sei $\{X_1, \ldots, X_n\}$ und $\{X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}\}$ die geordnete Stichprobe, d.h. es gilt $X_{(i-1)} \leq X_{(i)}$ für alle $i = 2, \ldots, n$. Dann ist der Hill Schätzer von $\frac{1}{\xi} = \frac{1}{\alpha}$ der k ten Ordnung gegeben durch

$$H_{k,n} := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \log\left(\frac{X_{(i)}}{X_{(k+1)}} \right).$$

Theorem

Falls $n \to \infty$, $k \to \infty$ und $\frac{k}{n} \to 0$, dann gilt

$$H_{k,n} \longrightarrow \frac{1}{\alpha}.$$

Pickands Schätzer $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\hat{\xi}_{k,n}^{(Pickands)} := \left(\frac{1}{\log(2)}\right) \log\left(\frac{X_{(k)} - X_{(2k)}}{X_{(2k)} - X_{(4k)}}\right)$$

Deckers Einmal und de Haan Schätzer $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\hat{\xi}_{k,n}^{DEdH} := \xi_{k,n}^{H(1)} + 1 - \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\left(\xi_{(k)}^{H(1)}\right)^2}{\xi_{k,n}^{H(2)}}\right]^{-1}$$

mit

$$\xi_{k,n}^{H(r)} = \sum \frac{1}{k}\left[\log\left(\frac{X_{(i)}}{X_{(k+1)}}\right)\right]^r, \quad r = 1, 2, \ldots .$$

Literatur:

- Embrechts P, Extremes and Insurance, 28 ASTIN Colloquium 1997
- Embrechts P, Kluppelberg C, and Mikosh T, Modelling Extremal Events, Springer Verlag, Berlin 1997
- Reiss R, and Thomas M, Statistical Analysis of Extreme Values, Birkhauser, Basel, Boston, 1997
- Resnick: Heavy Tailed Phenomena (Springer) 2006.
- Coles, S (2001): An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values. Springer Series in Statistics. Springer Verlag London.
- Beirlant, J; Y. Goegebeur; J. Segers; J. Teugels (2005): Statistics of Extremes. Theory and Applications.