Zuverlässigkeit
0. Teil

Prof. Erika Hausenblas

Montanuniversität Leoben, Österreich

10. Jänner 2017

Inhalt

Die Grundmenge Ω und Elementarereignisse

- Ω Grundmenge, ω Element
- $\omega \in \Omega$: ω ist Element von Ω

Example

Werfen eines Würfels: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Example

Lebensdauer eines Bauteiles: $\Omega = [0, \infty)$.

Example

Überprüfung von n Bauteilen ob diese defekt (=1) oder intakt (=0) sind.
$\Omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) : \omega_i = 0, 1,\ i = 1, \ldots, n\}$.

Ereignisse

Example

Werfen eines Würfels: $\Omega = \mathbb{N}$; $A = \{2;4;6\} = \{n \in \Omega : n$ ist durch 2 teilbar$\}$.

Example

Lebensdauer eines Bauteiles: $\Omega = [0, \infty)$; $A = \{$ das Bauteil ist innerhalb der Garantiezeit von einen halben Jahr kaputt gegangen $\}$; $A = \{$ Das Bauteil blieb ein ganzes Jahr intakt $\}$.

Example

Überprüfung von n Bauteilen ob diese defekt (=1) oder intakt (=0) sind. $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) : \omega_i = 0, 1,\ i = 1, \ldots, n\}$.
$A = \{(1, 0, 0, 1, \cdots, 0), (0, 0, 0, \ldots, 0)\}$, $A = \{\omega \in \Omega : \sum_{j=1}^{n} \omega_j \leq 3\}$.

Teilmengen von Ereignissen

1. $A_1 \subset A_2$ bedeutet, A_1 ist Teilmenge von A_2, d.h., aus $\omega \in A_1$ folgt $\omega \in A_2$;
2. $A_1 \supset A_2$ bedeutet, A_2 ist Teilmenge von A_1, d.h., aus $\omega \in A_2$ folgt $\omega \in A_1$;
3. $A_1 = A_2$, falls $A_1 \subset A_2$ und $A_1 \supset A_2$;

Example

Der Würfel:: $\{\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$; Elementar–Ereignisse $\{1\}, \{2\}, \cdots, \{6\}$. Das Ereignis $A_1 = \{2\}$ tritt genau dann ein, wenn die Zahl 2 gewürfelt wird. Das Ereignis $A_2 = \{2,4,6\}$ tritt genau dann ein, wenn eine gerade Zahl gewürfelt wird. Also gilt: $A_1 \subset A_2$, d.h., wenn A_1 eintritt, dann tritt auch A_2 ein.

Example

Lebensdauer eines Bauteiles: $\{\Omega = [0,\infty)$; Elementar–Ereignisse $\mathcal{P}([0,\infty) =$ alle möglichen Teilmengen die mittels den Interval gebildet werden können. Z.B. $[0, \frac{1}{2}), (100, 2000) \cup [500, 3000), \ldots$. Das Ereignis $A_1 = [0, 300)$ tritt genau dann ein falls das Bauteil weniger als 300 Stunden gearbeitet hat, Das Ereignis $A_2 = [500, \infty)$ falls das Bauteil nach 500 noch intakt war.

Durchschnitt und Vereinigung von Ereignissen

Seien $A, B, C \subset \Omega$ beliebige Teilmengen. Dann gelten

- *Eindeutigkeitsgesetze:* $A \cup \emptyset = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cup \Omega = \Omega$; $A \cap \Omega = A$ (allgemein: falls $A \subset B$, dann gilt $A \cap B = A$; $A \cup B = B$);
- *de Morgansche Gesetze:* $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$; $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$;
- *Assoziativ Gesetze:*
  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $A\ (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
- *Distributiv Gesetze:*
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Das Wahrscheinlichkeitsmaß

Definition

Gegeben sei ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{F})$. Das Wahrscheinlichkeitsmaß ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{P} : \mathcal{F} &\longrightarrow [0,1], \\ A &\mapsto \mathbb{P}(A). \end{aligned}$$

Für $A \in \mathcal{F}$ heißt $\mathbb{P}(A)$ Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $A \in \mathcal{F}$.

Example

Der Würfel: Sei $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ und $\mathcal{F}$ sei die Menge aller möglichen Teilmengen von Ω, d.h. $\mathcal{F} = \{\Omega, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,6\}, \{1,2,3,5,6\}, \ldots, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \emptyset\}$. Das Wahrscheinlichkeitsmaß definieren wir folgendermaßen:
Sei $A \in \mathcal{F}$. Dann setzen wir $\mathbb{P}(A) = |A|/6$.

Das Wahrscheinlichkeitsmaß

Definition

Gegeben sei ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{F})$. Das Wahrscheinlichkeitsmaß ist eine Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P} : \mathcal{F} & \longrightarrow & [0,1], \\ A & \mapsto & \mathbb{P}(A). \end{array}$$

Für $A \in \mathcal{F}$ heißt $\mathbb{P}(A)$ Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $A \in \mathcal{F}$.

Lebensdauer von Bauteilen:

Sei $\Omega = [0, \infty)\}$ und $\mathcal{F}$ sei die Menge aller möglichen durch Intervalle erzeugten Teilmengen von Ω; Das Wahrscheinlichkeitsmaß definieren wir folgendermaßen: Sei $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$, $I = [a, b)$. Sei T die Zeitpunkt zu den ein bestimmtes Bauteil defekt wurde. Dann setzen wir

$$\mathrm{Prob}(T \in I) = P(I) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Definition von Zufallsvariablen

Eine Zufallsvariable ist eine Abbildung von Ω in die reellen Zahlen.

Example

Sei Ω die Menge aller möglichen Unfallverläufe eines Auffahrtsunfall, und $\mathcal{F}$ die Menge aller möglichen Teilmengen von Ω. Sei

$$\begin{aligned} X:\Omega &\to \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto X(\omega) = \text{Kosten die ein Unfall mit Unfallverlauf } \omega \text{ verursacht.} \end{aligned}$$

Example

Sei Ω die Menge aller möglichen Wetterverläufe eines Tages und $\mathcal{F}$ die Menge aller möglichen Teilmengen von Ω. Sei

$$\begin{aligned} X:\Omega &\to \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto X(\omega) = \text{Wassermenge die sich in einen Gefäss mit einen} \\ &\qquad \text{Quadratzentimeter Grundfläche bei Wetterverlauf } \omega \text{ angesammelt hat} \end{aligned}$$

Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen

Example

Sei Ω die Menge aller möglichen Unfallverläufe eines Auffahrtunfalls, und $\mathcal{F}$ die Menge aller möglichen Teilmengen von Ω. Sei

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to \mathbb{R} \\ X(\omega) &\mapsto \text{Kosten die ein Unfall mit Unfallverlauf } \omega \text{ verursacht.} \end{aligned}$$

Für die Versicherung ist der Unfallverlauf uninteressant, wichtig sind die Kosten die ein Unfall verursacht. Bevor ein Unfall geschieht, kann man diese aber nicht vorhersagen, man kann aber aus den Erfahrungswerten die Kosten vorhersagen. Dies kann man mit einer Verteilungsfunktion modellieren.
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Kosten im Interval $[a, b]$ liegen ist

$$P([a,b]) := \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (a,b)\}\right).$$

Die Funktion

$$x \mapsto \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\}\right)$$

ist die Verteilungsfunktion von X.

Dichtefunktion einer Zufallsvariablen

Sei X eine Zufallsvariable über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und F_X die zugehörige Verteilungsfunktion, d.h.,

$$F(x) := \mathbb{P}\left(X \leq x\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung:

Man kann zeigen, dass $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folgende Eigenschaften besitzt:

1. $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$;
2. $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$;
3. $F_X(x) \leq F_X(y)$ für $x \leq y$ (F_X ist monoton steigend).

Dichtefunktion einer Zufallsvariablen

Umgekehrt, ist eine Funktion F stetig, so besitzt diese Funktion eine Dichte. Dass heißt, es gibt eine nicht negative Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass gilt

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy, \quad -\infty < a < \infty. \tag{1}$$

Umgekehrt, ist eine nichtnegative Funktion f die Ableitung von F, d.h.

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} \end{aligned}$$

und $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$, dann ist F definiert durch (1) eine Verteilungsfunktion.

Dichtefunktion einer Zufallsvariablen

Definition

Eine Zufallsvariable heißt stetig verteilt mit Dichte f, falls sich ihre Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in folgender Weise schreiben lässt:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen

Gegeben: Zufallsvariable X mit Dichtefunktion f_X, Verteilungsfunktion F_X:

Wichtige Kennwerte von Verteilungsfunktionen:

- Erwartungswert: $m_X = \mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx$;
- Varianz: $v_X = \mathbb{E}\left(X - \mathbb{E}X\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 f_X(x)\, dx$;
- Standardabweichung: $\sigma_X = \sqrt{v_X}$;
- Schiefe: $v(X) := \mathbb{E}\left[\left(\frac{X - m_x}{\sigma_X}\right)^2 3\right]$.
- Median: $\mathbb{P}\left(X \geq \mathrm{median}\right) = 0.5$;
- α–Quantile: $F^{-1}(\alpha)$;
- Modalwert: Modus x_D oder Modalwert ist bei einer empirischen Häufigkeitsverteilung der häufigst vorkommende Wert.

Unabhängigkeit

Definition

Zwei Zufallsvariable X und Y auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; \mathcal{F}; \mathbb{P})$ heißen unabhängig , wenn für beliebige Mengen A und $B \in \mathcal{F}$ gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A \text{ und } X(\omega) \in B\}) \\ = \quad & \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}) \cdot \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}). \end{aligned}$$

Beispiel Würfel:

$A = \{$ Es wurde eine 3 gewürfelt $\}$, $B = \{$ Die Zahl war ungerade $\}$.

Example

$A = \{$ erstes Bauteil explodierte $\}$, $B = \{$ das danebenliegende Bauteil nahm Schaden $\}$.

Formel von Bayes

die bedingte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A unter der Bedingung B:

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}. \tag{2}$$

Beispiel Würfel:

$A = \{$ die gewürfelte Zahl ist 3$\}$, $B = \{$ die gewürfelte Zahl ist ungerade $\}$.

Kleine Übung zur Formel von Bayes

Vor Ihnen Stehen drei Schachteln, eine ist mit Orangen gefüllt, eine mit Äpfeln gefüllt und eine zur Hälfte mit Äpfeln und zur Hälfte mit Orangen gefüllt.
Sie gehen zur ersten Schachtel und nehmen einen Apfel heraus. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dass dies die Schachtel ist die ganz mit Äpfeln gefüllt ist oder zur Hälfte mit Äpfeln und zur Hälfte mit Orangen gefüllt ist.

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit:

Sei $\{B_i : i = 1, \ldots, n\}$ eine Partition von Ω, d.h. B_i und B_j sind disjunkt für $i \neq j$ und $\cup_{i=1}^n B_i = \Omega$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \mid B_i)\mathbb{P}(B_i).$$