Zuverlässigkeit

2. Teil

Prof. Erika Hausenblas

Montanuniversität Leoben, Österreich

10. Jänner 2017

Inhalt

Zuverlässigkeit größerer Systeme

Komponenten in Serie geschaltet

Komponenten in Serie geschaltet

Betrachten wir ein System das aus n Komponenten E_i, $i = 1, \ldots, n$ in Serie zusammengeschaltet ist.

- $R_i(t)$: Zuverlässigkeitsfunktion eines Untersystems
- Annahme: die Komponenten funktionieren unabhängig voneinander;

Zuverlässigkeitsfunktion R_S des Gesamtsystems

$$R_S(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t).$$

Angenommen: $\lambda_i(t)$ ist Ausfallrate der i-ten Komponente zur Zeit $t > 0$
Damit gilt $R_i(t) = \exp(-\lambda_i(t))$, $i = 1, \ldots, n$. und somit

$$R_S(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t) = \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)\right).$$

Komponenten in Serie geschaltet

Example

Einfluss der Funktionstüchtigkeit einzelner Komponenten auf das Gesamtsystem:

Zuverl. der Komp.	0.8	0.85	0.9	0.95	0.98	0.99
Anzahl der Komp.						
1	0.8	0.85	0.9	0.95	0.98	0.99
5	0.32768	0.44370	0.59049	0.77378	0.90392	0.95099
10	0.10737	0.19687	0.348678	0.598737	0.817073	0.904382
20	0.0115292	0.0387595	0.12158	0.35849	0.66761	0.81791
50	$1.47 \cdot 10^{-5}$	$2.96 \cdot 10^{-4}$	$5.15 \cdot 10^{-3}$	0.07694	0.36417	0.60501

Redundanz oder Komponenten parallel geschaltet

Redundanz oder Komponenten parallel geschaltet

Betrachten wir ein System das aus n Komponenten E_i, $i = 1, \ldots, n$ in Serie zusammengeschaltet ist.

- $R_i(t)$: Zuverlässigkeitsfunktion eines Untersystems
- Annahme: die Komponenten funktionieren unabhängig voneinander;

Hier gilt für F_S

$$F_S(t) = \prod_{i=1}^{n} F_i(t),$$

woraus folgt

$$R_S(t) = 1 - F_S(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - R_i(t)) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - e^{-\lambda_i(t)})$$

Redundanz oder Komponenten parallel geschaltet

Example

Einfluss der Funktionstüchtigkeit einzelner Komponenten auf das Gesamtsystem:

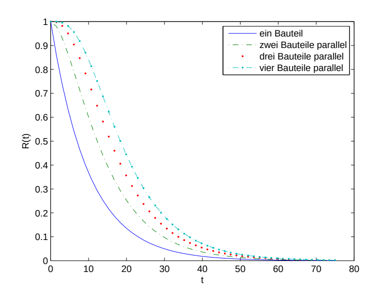
Anzahl der Komp.	Zuverl. des Systems	Anstieg der Zuverl.	in Prozent
1	0.8	$\cdots$	
2	0.960000	0.160000	20.00
3	0.992000	0.032000	24.00
4	0.998400	0.006400	24.80
5	0.999680	0.001280	24.96
6	0.999936	0.000256	24.99

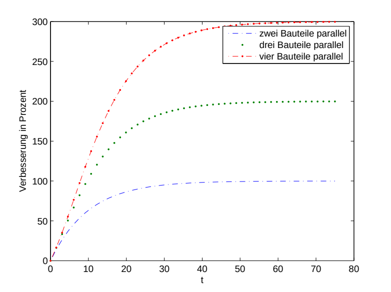
Redundanz oder Komponenten parallel geschaltet

Example

Ein Bauteil hat eine konstante Ausfallrate λ. Um die Zuverlässigkeit zu erhöhen, werden zwei, bzw. drei Bauteile in eine Maschine eingebaut. Im folgenden Bild ist die $R_S(t)$ für ein Bauteil, zwei und drei Bauteile parallel geschaltet eingezeichnet. Man sieht, dass wenn die Zeit wächst, der prozentuelle Unterschied kleiner wird. Das heißt, die Verbesserung der Ausfallrate macht sich vor allem in kurzen Zeitspannen bemerkbar, für grosses t geht

$$R_S(t) = e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}.$$





Ein weiteres Beispiel

Gegeben:

- n Bauteile parallel geschaltet
- Bauteil j hat eine konstante Ausfallrate λ_j.

Fragen: Wie lautet die Ausfallrate des Gesamtsystems ? Berechnen sie die MTF und die Verteilung von T_f.
Sei p_j die Wahrscheinlichkeit das Bausteine j funktioniert. Damit gilt

$$P = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_j).$$

Setzt man die Realibility Funktion ein, erhält man

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_j(t))$$

und somit

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - e^{-t\lambda_j}).$$

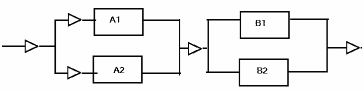
Rechnet man sich die MTF aus, erhält man

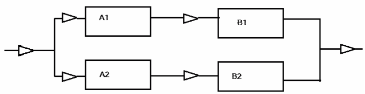
$$\mathbf{MTTF} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} - \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j}$$
$$+ \sum_{j=1}^{n-2} \sum_{i=j+1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{\sum \lambda_j}.$$

Da das System ausfällt, wenn alle Komponenten ausfallen, gilt $T_f = \max\{T_1, \ldots, T_n\}$ wobei T_i die Lebensdauer der i-ten Komponente ist. Für große n kann man die Verteilung von T_f mittels Extremalverteilungen berechnen.

High level redundancy ⇔ low level redundancy

Angenommen, wir haben ein System zu entwerfen, dass zwei Operationen mittels Baustein A und B (mit Zuverlässigkeit r_A und r_B) in Serie ausführen muss: Um die Zuverlässigkeit des Systems zu erhöhen, will man je zwei Bauteile A und B verwenden. Es kommen dabei die zwei möglichen Anordnungen in Betracht:





Welche obige Anordnung hat die höhere Zuverlässigkeit?

Es gilt für die Anordnung seriell - parallel

$$r_{sp} = \left(1-(1-r_B)^2\right)\left(1-(1-r_A)^2\right)$$

und für die Anordnung parallel - seriell

$$r_{ps} = 1-(1-r_A r_B)^2 \,.$$

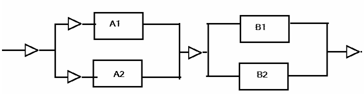
Berechnet man die Differenz

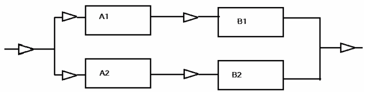
$$r_{sp} - r_{ps} = 2r_A(1-r_A)r_B(1-r_B),$$

so sieht man, dass diese Differenz immer positiv ist. Damit ist die Anordnung seriell-parallel, besser als parallel-seriell.

High level redundancy $\Leftrightarrow$ low level redundancy

Angenommen, wir haben ein System zu entwerfen, dass zwei Operationen mittels Baustein A und B (mit Zuverlässigkeit r_A und r_B) in Serie ausführen muss: Um die Zuverlässigkeit des Systems zu erhöhen, will man je zwei Bauteile A und B verwenden. Es kommen dabei die zwei möglichen Anordnungen in Betracht:





Welche obige Anordnung hat die höhere Zuverlässigkeit?

Setzt man die Werte $r_A = 0.95$ und $r_B = 0.9$ ein, bekommt man für die Anordnung seriell - parallel und parallel - seriell

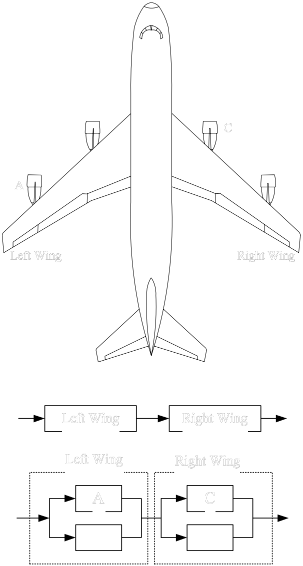
$$r_{sp} = (1 - 0.05^2)(1 - 0.1^2) = 0.987525, \quad r_{ps} = (1 - 0.05 \cdot 0.1) = 0.978975.$$

Für die Werte $r_A = r_B = 0.9$, so bekommt man für die Anordnung seriell - parallel und parallel - seriell

$$r_{sp} = (1 - (1 - 0.9)^2)^2 = 0.9801, \quad r_{ps} = (1 - 0.9^2)^2 = 0.9639.$$

Ein Flugzeug

Gegeben: vier Propeller mit Buchstaben A, B, C und D. Die Aussage *das Flugzeug fliegt, wenn mindestens ein Propeller auf jedem Flügel funktioniert*, führt dazu, dass die beiden Flügel Seriell zu betrachten - Ausfall der Antriebs-Funktion auf beiden Flügeln entspricht dem Systemausfall.



Warnung

Parallel und Seriell muss nicht immer mit der geometrischen Anordnung übereinstimmen. Angenommen man hat einen Stromkreis mit einen Schalter. Man möchte die Zuverlässigkeit des Schalters (beim unterbrechen des Stromkreises) erhöhen, indem man einen Schalter hinzufügt. Diesen muss man dann in Serie (physikalisch) zuschalten, aber in den Berechnung modelliert man diese System parallel. Umgekehrt, angenommen der Stromkreis ist normalerweise unterbrochen und man möchte ihn nur im Falle eines Unfalls zuschalten, muss man die Schalter parallel anbringen, um die Zuverlässigkeit zu erhöhen.

Beispiel

Ein System besteht aus mehreren Subsystemen, die jeweils verschiedene Ausfallsraten besitzen. Berechnen Sie die Zuverlässigkeit $R(t)$.

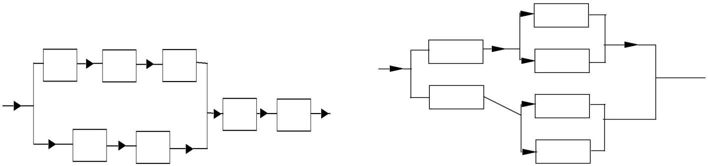


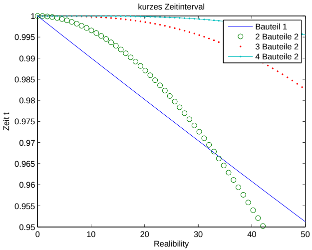
Abbildung: Reliability Block Diagramm

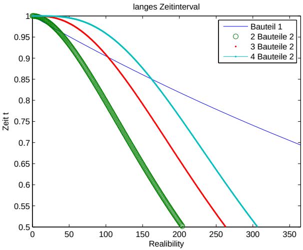
Was kostet weniger?

Sie haben die Auswahl zwischen einen teuren, aber sehr Zuverlässigen Bauteil (B1), oder parallel geschaltet billigen Bauteilen (B2).

- B1 kostet 779 , die Zuverlässigkeit ist exponential verteilt mit Parameter 0.001;
- B1 kostet 249 , die Zuverlässigkeit ist exponential verteilt mit Parameter 0.006;

- Nur Bauteil 1: $R_1(t) = 1 - e^{-0.001t}$;
- Zwei Bauteile 2: $R_2(t) = 1 - \left(1 - e^{-0.005t}\right)^2 = 2e^{-0.005t} - e^{-20.005t}$;
- Drei Bauteile 2: $R_3(t) = 1 - \left(1 - e^{-0.005t}\right)^3$;
- Vier Bauteile 2: $R_4(t) = 1 - \left(1 - e^{-0.005t}\right)^4$;





Komplexe Konfigurationen

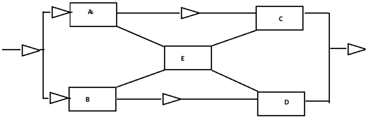


Abbildung: Reliability Block Diagramm

Das System wird in zwei Systeme zerlegt:

Abbildung: Zerlegtes Diagramm

Nach der Formel von Bayes gilt somit

$$R_{ges} = R_E R_{zweitesSys} + (1 - R_E)\, R_{drittesSys}..$$

Komplexe Konfigurationen

Das System wird in zwei Systeme zerlegt:

Abbildung: Zerlegtes Diagramm

Nach der Formel von Bayes gilt somit

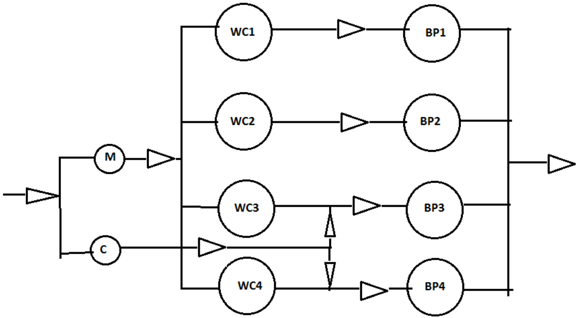
$$R_{ges} = R_E R_{zweitesSys} + (1 - R_E)\, R_{drittesSys.}.$$

Angenommen $R_A = R_B = 0.9$, $R_C = R_D = 0.95$ und $R_E = 0.80$. Berechnen Sie die Zuverlässigkeit des Gesamtsystems.

Beispiel

Das Bremssystem in einem Auto besteht aus einem hydraulischen System (Bremspedal) und aus einem mechanischen System (Handbremse). Beide Untersysteme müssen ausfallen, damit das Bremssystem versagt. Das hydraulische System fällt aus sobald der Hauptbremszylinder ausfällt (Ereignis M), einer der Blockierkraftregler am Rad ausfällt (Ereignisse $WC_1, \ldots, WC_4$), oder der Bremsbelag fällt aus (Ereignisse $BP_1, \ldots, BP_4$). Das mechanische Bremssystem fällt aus falls das Kabelsystem ausfällt (Ereignis C), oder bei beiden Hinterradbremsen der Bremsbelag ausfällt.

Beispiel



Minimal Cut Sets und Paths

Definition

Ein minimaler Weg ist ein Weg im Blockdiagramm. Falls alle Komponenten auf diesen Weg funktionieren, so funktioniert das Gesamtsystem.
Eine minimale Schnittmenge ist ein Schnitt im Blockdiagramm. Fallen alle Komponenten dieses Schnittes aus, so fällt das Gesamtsystem aus.

Mittels solcher Mengen kann man untere und obere Schranken der Gesamtzuverlässigkeit eines Systems angeben. Hier ist es wichtig dass die Mengen aus disjunkten Elementen bestehen, und diese unabhängig sind.

Minimal Cut Sets und Paths

Definition

Ein minimaler Weg ist ein Weg im Blockdiagramm. Falls alle Komponenten auf diesen Weg funktionieren, so funktioniert das Gesamtsystem.
Eine minimale Schnittmenge ist ein Schnitt im Blockdiagramm. Fallen alle Komponenten dieses Schnittes aus, so fällt das Gesamtsystem aus.

1. Angenommen die Minimalen Schnittmengen sind $\{S_k^{cut} : k = 1, \dots, K\}$. Dann gilt

$$R_{ges} \leq \prod_{k=1}^{K} \left\{ 1 - \prod_{i \in S_k^{cut}} (1 - R_i) \right\}.$$

2. Umgekehrt, seien die Minimalen Wege gegeben durch $\{S_k^{path} : k = 1, \dots, K\}$. Dann gilt

$$R_{ges} \geq 1 - \prod_{k=1}^{k'} \left[1 - \prod_{i \in S_k^{path}} R_i \right].$$

Minimal Cut Sets und Minmal Paths

1. Angenommen die Minimalen Schnittmengen sind $\{S_k^{cut} : k = 1, \dots, K\}$. Dann gilt
$$R_{ges} \leq \prod_{k=1}^{K} \left\{ 1 - \prod_{i \in S_k^{cut}} (1 - R_i) \right\}.$$

2. Umgekehrt, seien die Minimalen Wege gegeben durch $\{S_k^{path} : k = 1, \dots, K\}$. Dann gilt
$$R_{ges} \geq 1 - \prod_{k=1}^{k'} \left[1 - \prod_{i \in S_k^{path}} R_i \right].$$

Aufgabe

Angenommen $R_D = R_A = 0.95$, und $R_B = R_c = R_E = R_f = 0.92$. Geben Sie eine untere und obere Abschätzung der Zuverlässigkeit des Gesamtsystems an.

- Minimale Wege: $\{A, B\}, \{A, C\}, \{D, E\}, \{D, F\}$.
- Minimale Schnittmengen: $\{A, D\}$, $\{B, C, E, F\}$.

Stand by Schaltungen (Reserve Schaltungen)

In diesem Fall sind die n Bauteile parallel angeordnet, aber nur eines ist in Betrieb. Fällt dieses aus, kommt das nächste zum Einsatz und wird angeschaltet. Fällt dieses aus, kommt das nächste dran. Das System fällt aus, sobald auch das n-te Bauteil funktionsuntüchtig ist.

- Systeme mit kalter Reserve (Cold stand by)
- Systeme mit heißer Reserve (Hot stand by)

Systeme mit kalter Reserve (Cold stand by)

Der Bauteil ist während der Reserve ausgeschaltet $\Rightarrow$ er kann also nicht kaputt gehen.
Für die Ausfallzeit T_f^S für das Gesamtsystem gilt (Ausfallzeit des b$i$ten Bauteils ist T_f^i)

$$T_f^S = \sum_{i=1}^n T_f^i.$$

In diesem Fall gilt

$$f_{T_f^S}(t) = (f_{T_f^i})^{(n)\star}(t).$$

Für die **MTTF** gilt,

$$\mathbf{MTTF} = -\frac{d\hat{f}_{T_f^S}}{ds} = \frac{n}{\lambda}.$$

Beispiel I

Ein System besteht aus n Bauteilen. Angenommen die Lebensdauer der n Bauteile ist exponential verteilt mit Parameter λ. Dann ist

$$f_{T_f^i}(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad \text{und} \quad \hat{f}_{T_f^i}(s) = \frac{\lambda}{s+\lambda}, \quad i = 1, \dots n.$$

Damit gilt für die Laplacetransformierte des Gesamtsystems $\hat{f}_{T_f^S}$ folgendes

$$\hat{f}_{T_f^S} = \frac{\lambda^n}{(s+\lambda)^n}.$$

Dies ist aber genau die Laplacetransfomierte der Gamma Verteilung und es gilt damit

$$f_{T_f^S}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}.$$

Da

$$R(t) = 1 - \int_0^t f_{T_f^S}(s)\, ds$$

gilt, ist $R(t)$ Poisson verteilt mit Parameter λt. D.h.

$$R(t) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Beispiel II

Ein System besteht aus 2 Bauteilen. Angenommen die Lebensdauer der beiden Bauteile ist exponentialverteilt mit Parameter λ_1 und λ_2. Dann ist

$$f_{T_f^1}(t) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}, \quad \text{und} \quad \hat{f}_{T_f^1}(s) = \frac{\lambda_1}{s+\lambda_1},$$

und

$$f_{T_f^2}(t) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}, \quad \text{und} \quad \hat{f}_{T_f^2}(s) = \frac{\lambda_2}{s+\lambda_2},$$

Damit gilt für die Laplacetransformierte des Gesamtsystems $\hat{f}_{T_f^S}$

$$\hat{f}_{T_f^S} = \frac{\lambda_1}{(s+\lambda_1)} \frac{\lambda_2}{(s+\lambda_2)}.$$

Somit

$$f_{T_f^S}(t) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} \left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right).$$

und

$$R(t) = \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1-\lambda_2}$$

und

$$\mathbf{MTTF} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}.$$

Systeme mit heißer Reserve (Hot stand by)

Bauteile sind während sie warten im Stand by modus, $\Rightarrow$ sie können ausfallen.

Bezeichnen wir die Dichte der Ausfallwahrscheinlichkeit im Stand by Modus mit $\bar{f}_{T_f^i}$, so erhalten wir für die Ausfallzeitzeit T_f^S für das Gesamtsystem

$$T_f^S = \sum_{i=1}^{n} T_f^i,$$

wobei die Ausfallzeiten des $i$ten Bauteils mit T_f^i bezeichnet werden. Es wird angenommen, dass die Ausfallzeiten der einzelnen Bauteile unabhängig voneinander sind. In diesem Fall gilt

$$f_{T_f^S}(t) = (f_{T_f^i})^{(n)\star}(t).$$

Systeme mit heißer Reserve (Hot stand by)

Ein System besteht aus n Bauteilen und funktioniert nur, falls mindestens k Bauteile funktiontüchtig sind.
Die Wahrscheinlichkeit dass ein Bauteil zur Zeit t funktioniert ist gleich p

Gefragt ist die Wahrscheinlichkeit, dass zu einem Zeitpunkt t genau k Bauteile funktionieren.

$$\mathbb{P}\,(\text{genau k Bauteile funktionieren}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Damit das Gesamtsystem funktionstüchtig ist, müssen mindestens k aus n Bauteile funktionieren. Es gilt somit

$$\mathbb{P}\,(\text{mindestens k Bauteile funktionieren}) = \textstyle\sum_{i=1}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}.$$

Ist $k = 1$ erhalten wir eine Parallelschaltung, ist $k = n$ erhalten wir eine Serienschaltung.

Modellierung von Abhängigkeiten

- Commen cause failure
  - Design or material deficiency
  - Installation error
  - Maintenance error
  - harsh environment (vibration, contamination, radiation, ...);
- Cascading failure (propagation failure - Domino effect)
- **Negative Abhängigkeit:** Angenommen man hat zwei Komponenten. Sei A_i das Ereignis, dass Komponente i ausfällt.
  - Die Komponenten haben eine positive Anhängigkeit, falls $\mathbb{P}(A_1 \mid A_2) > \mathbb{P}(A_1)$ und $\mathbb{P}(A_2 \mid A_1) > \mathbb{P}(A_2)$ gilt.
  - Die Komponenten haben eine negative Anhängigkeit, falls $\mathbb{P}(A_1 \mid A_2) < \mathbb{P}(A_1)$ und $\mathbb{P}(A_2 \mid A_1) < \mathbb{P}(A_2)$ gilt.

Modellierung von Abhängigkeiten

- The square root model
- The β–factor model
- The binomial failure rate model;

The β–factor model

Es gibt zwei Typen von Fehlern:

- Fehler Typ 1: Fehler verursacht durch die Komponente;
- Fehler Typ 2: Fehler verursacht durch *common law*;

Es gibt zwei Ausfallraten:

- $\lambda^{(i)}$ die Ausfallrate der $i$ten Komponente aufgrund von Fehlern Typ 1;
- $\lambda^{(c)}$ die Ausfallrate aufgrund von Fehlern Typ 2.

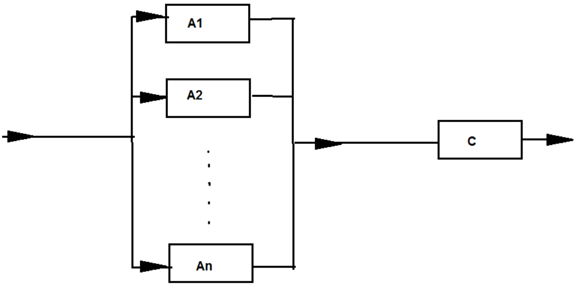
Annahme: Ein Eintreten des Fehlers von Typ 1 und ein Eintreten des Fehlers von Typ 2 sind unabhängig.

Common cause factor:

$$\beta = \frac{\lambda^{(c)}}{\lambda^{(i)}+\lambda^{(c)}} = \frac{\lambda^{(c)}}{\lambda}.$$

The β–factor model

Gegeben Bauteile $A_1, \cdots A_n$. Modellierung eines Commen Causes bei einen in Serie anghängten extra Bauteil C.



The binomial failure rate model

- Annahme: n Komponenten mit individueller Ausfallrate $\lambda^{(i)}$ sind gegeben;
- Ein *Schock Eregnis* verursacht zugleich einen Schaden an mehreren Komponenten.
- Die Wartezeit auf das Schockereignis ist exponentiell verteilt mit Parameter ν.
- Tritt so ein Schockeregnis ein, so gilt

$$\mathbb{P}(\text{ Komponente } A_i \text{ erleidet einen Schaden }) = p.$$