Zuverlässigkeit

3. Teil

Prof. Erika Hausenblas

Montanuniversität Leoben, Österreich

27. Jänner 2016

Inhalt

Preventative Maintenance - Vorbeugende Instandhaltungsmassnahmen

Oft tauscht man vorbeugend eine ein Teil aus, um zu Vermeiden daß es zur Reparatur kommt. Angenommen das Bauteil hat Zuverläßigkeitsfunktion $R(t)$. Vorbeugend wird das Bauteil zum Zeitpunkt T durch ein neues ausgetauscht. Dann gilt

$$R_p(t) = R(t),\ für\ 0 \leq t < T,$$
$$R_p(t) = R(T)\, R(t-T),\ für\ T \leq t < 2T,$$

und für $m \in \mathbb{N}$

$$R_p(t) = R(T)^{m-1}\, R(t-T),\ für\ (m-1)T \leq t < mT.$$

Es gilt dann

$$\mathbf{MTTF} = \int_0^\infty R_m(t)\, dt = \frac{\int_0^T R(t)\, dt}{1 - R(T)}.$$

Preventative Maintenance - Ein Beispiel

Angenommen, die Ausfallrate ist konstant. Dann gilt

$$R(t) = \exp(-\lambda t)$$

und daher für $(m-1)T \leq t < mT$

$$R_p(t) = \exp(-\lambda T)^{m-1} \exp(-\lambda(T - mT)) = \exp(-\lambda t).$$

Hier in diesen Fall ist es ziemlich egal. Allerdings muss man berücksichtigen, wie teuer ein Austausch kommt, der plötzlich zu machen ist, bzw. was ein Austausch kostet der vorgeplant werden kann.

Preventative Maintenance - Ein Beispiel

Angenommen, die Lebenszeit eines Bauteils gehorcht der Weibull Verteilung. Dann gilt für $(m-1)T \leq t < mT$

$$R_p(t) = \exp\left[-(m-1)\left(\frac{T}{\theta}\right)^\beta\right] \exp\left[-\frac{t-(m-1)T}{\theta}\right]^\beta.$$

Angenommen das Bauteil ist ein Kompressor dessen Lebensdauer Weibull verteilt ist mit parameter $\beta = 2$ und $\theta = 100 \, Tage$, $T = 20$. Dann gilt z.B. $R_p(90) = 0.8437$

Modellierung der Reparaturzeit

- Birnbaum Sanders Verteilung
- inverse Gauss Verteilung (inverse Normalverteilung oder auch Wald-Verteilung genannt)
- Log-Normal Verteilung.

Birnbaum Sanders Verteilung

Birnbaum und Saunders (1969) führten die Verteilung ein. Sie ist eine Stochastische Version der Miners Regel, deren Dichte Funktion mit Parametern α und λ ist gegeben durch

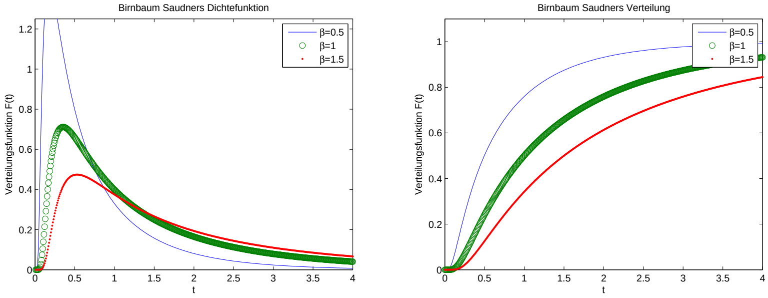
$$f(t) = \frac{\sqrt{\lambda t}+1/\sqrt{\lambda t}}{2\alpha t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(\sqrt{\lambda t}+1/\sqrt{\lambda t})^2/2\alpha^2}, \quad t \geq 0.$$

Die Zuverlässigkeitsfunktion ist durch

$$R(t) = \Phi\left(\frac{1}{\alpha}\left(1/\sqrt{\lambda t} - \sqrt{\lambda t}\right)\right)$$

gegeben. Erwartungswert der Reparaturzeit

$$\mathbf{MTTR} = \mathbb{E}T_f = \frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{\alpha^2}{2}\right).$$



Inverse Gauss Verteilung

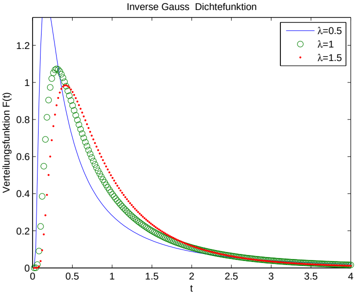
In manchen Situationen kommt es vor dass λ bei 0 startet und zuerst ansteigt, aber nach einem Zeitpunkt t_0 allerdings abfällt. Dieses Verhalten kann sehr gut mittels der inversen Gauss Verteilung modelliert werden.

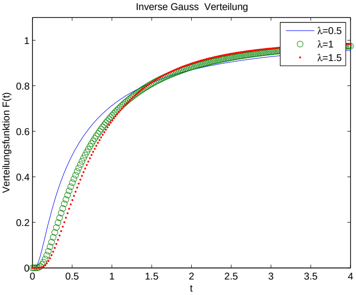
Die Dichte der Inversen Gauss Funktion mit Parametern μ und λ hat folgende Form (in der Literatur kommen verschiedene Varianten vor !)

$$f(t) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi t^3}}\, e^{-(\lambda/2\mu^2)[(t-\mu)^2/t]}, \quad t \geq 0.$$

Weiters ist MTTR gegeben durch

$$\mathbf{MTTR} = \mu;$$





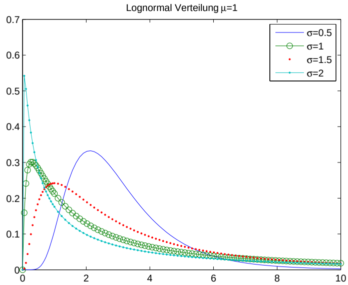
Lognormal Verteilung

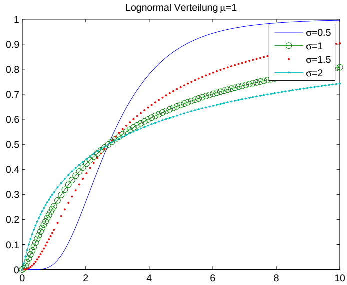
Die Dichte der Lognormal Verteilung ist zuerst nahe Null, steigt dann plötzlich an fällt dann nachdem sie ihr Maximum erreicht hat relativ schnell ab. Die Dichte der logarithmischen Normalverteilung $\mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$ mit den Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R}, \sigma > 0$, ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left(-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Weiters ist MTTF gegeben durch

$$\mathbf{MTTR} = \mathrm{E}(T_r) = \mathrm{e}^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$





Perfekte Reparatur - Nicht Perfekte Reparatur

Repariert man ein Bauteil, so kann man nicht immer davon ausgehen, dass das Bauteil nachher wie neu funktioniert. Vor allem bei älteren Bauteilen nimmt man an, dass nachdem man den Fehler repariert hat, aufgrund anderer Ermüdungserscheinungen, bald wieder einen Ausfall auftritt. Hat eine 14 Jahre alte Waschmaschine einen Ausfall, wird man geneigt sein eine neue zu kaufen und die alte auszutauschen.
Dies führt zur folgenden Unterscheidung:

- perfect repair System
- imperfect repair System;

Berechnung der MTTF und MTTR bei Bauteile in Serie geschaltet

Gegeben:

- n Bauteile in Serie geschaltet
- Die MTTF des Bauteils i wird mit $\mathbf{MTTF}_i$,
- die MTTR des Bauteils i wird mit $\mathbf{MTTR}_i$
- Die MTTR kann gegenüber der Laufzeit und MTTF vernachlässigt werden

Bezeichnen wir mit $\mathbf{MTTR}_S$ die Reparaturzeit für das Gesamtsystem. Dann gilt

$$\mathbf{MTTR}_S = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbf{MTTR}_i}{\mathbf{MTTF}_i}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mathbf{MTTF}_i}}.$$

Berechnung der MTTF und MTTR bei Bauteile parallel geschaltet

Gegeben:

- n Bauteile in Serie geschaltet
- Ausfallrate ist konstant und Bauteil i hat Ausfallrate λ_i
- die MTTR des Bauteils i wird mit $\mathbf{MTTR}_i$
- Die MTTR kann gegenüber der Laufzeit und MTTF vernachlässigt werden

Bezeichnen wir mit $\mathbf{MTTR}_S$ die Reparaturzeit für das Gesamtsystem. Dann gilt

$$\mathbf{MTTR}_S = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbf{MTTR}_i \, \lambda_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} = \frac{1}{\lambda_S} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{MTTR}_i \, \lambda_i,$$

mit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \lambda_S$.

Berechnung der MTTF und MTTR bei Bauteile geschaltet

Gegeben:

- n Bauteile in Serie geschaltet
- Die MTTF des Bauteils i wird mit $\mathbf{MTTF}_i$,
- die MTTR des Bauteils i wird mit $\mathbf{MTTR}_i$
- Die MTTR kann gegenüber der Laufzeit und MTTF vernachlässigt werden

$$\mathbf{MTTR}_S = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{MTTR}_i}{\mathbf{MTTF}_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\mathbf{MTTF}_i}}.$$

Zuverlässigkeit eines *one unit* Bausteines mit Reparatur

Setting:

Gegeben ist ein Baustein mit Reparatur:

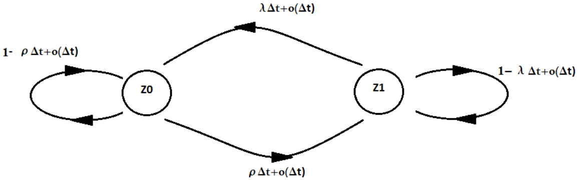
- Lebensdauerverteilung: exponential verteilt mit Parameter λ;
- Dauer der Reparatur: exponential verteilt mit Parameter ρ;

Es gibt zwei Zustände in denen sich das System befinden kann:

- Z_1: *good state* - Die Einheit ist funktionstüchtig;
- Z_0: *bad state* - Die Einheit ist funktionsuntüchtig;

Zuverlässigkeit eines *one unit* Bausteines mit Reparatur

Übergang	Wahrscheinlichkeit im Zeitintervall $(t, t+\Delta t)$
$Z_1 \to Z_1$	$1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$
$Z_1 \to Z_0$	$\lambda \Delta t + o(\Delta t)$
$Z_0 \to Z_1$	$\rho \Delta t + o(\Delta t)$
$Z_0 \to Z_0$	$1 - \rho \Delta t + o(\Delta t)$



Zuverlässigkeit eines *one unit* Bausteines mit Reparatur

Matrizenschreibweise:

$$\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} P_0(t) \\ P_1(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \text{Wahrscheinlichkeit, dass das System zur Zeit } t \text{ sich in Zustand } Z_0 \text{ befindet} \\ \text{Wahrscheinlichkeit, dass das System zur Zeit } t \text{ sich in Zustand } Z_1 \text{ befindet} \end{pmatrix}$$

Übergangswahrscheinlichkeiten:

Es gilt

$$\mathbf{P}'(t) = \begin{pmatrix} -\rho & \lambda \\ \rho & -\lambda \end{pmatrix} \mathbf{P}(t), \quad \mathbf{P}(0) = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 \end{pmatrix},$$

wobei $p_0 =$*Wahrscheinlichkeit, dass das System in* Z_0 *startet*, und $p_0 =$ *Wahrscheinlichkeit, dass das System in* Z_1 *startet*. (also $p_0 + p_1 = 1$).

Ein Stochastischer Prozess

Stochastischer Prozess

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Ein Stochastischer Prozess $\{\xi(t) : t \in [0, \infty)\}$ ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \xi : \Omega \times [0,\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\omega, t) &\mapsto \xi(t,\omega) = \xi(t)^{a}. \end{aligned}$$

[a] Man lässt gerne das ω weg.

Definition

Ein stochastischer Prozess ξ heißt stationär, falls für alle $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n < \infty$ die Verteilung der Zufallsvariable

$$(\xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, \xi(t_n))$$

nur von den Differenzen $t_2 - t_1$, $t_3 - t_2$, …, $t_n - t_{n-1}$ abhängt.

Stationäre Lösung:

Die stationäre Lösung eines Systemes beschreibt die Lösung des Systems für große t. Hier bleibt $\mathbf{P}(t)$ konstant, d.h.

$$\mathbf{P}'(t) = 0.$$

$\Rightarrow$ Berechnen des Eigenvektors zum Eigenwert 0 mit Summennorm 1. Lösung von:

$$\begin{pmatrix} -\rho & \lambda \\ \rho & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = 0, \quad p_0 + p_1 = 1, \quad p_0, p_1 \geq 0.$$

Nach kurzer Rechnung erhalten wir

$$\mathbf{p}_{stat} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\lambda+\rho} \\ \frac{\rho}{\lambda+\rho} \end{pmatrix}.$$

Verfügbarkeit

Definition

Die Verfügbarkeit (*Aviability*) ist jene Wahrscheinlichkeit, das System zu einem definierten Zeitpunkt oder in einer bestimmten Zeitspanne im Zustand Z_1 vorzufinden.

Sei $\xi(\omega)$ ein stochastischer Prozess mit

$$\xi(t,\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls zur Zeit } t \text{ Bauteil im Zustand } Z_1 \text{ ist, also funktioniert,} \\ 0 & \text{falls zur Zeit } t \text{ Bauteil im Zustand } Z_0 \text{ ist, also funktionsuntüchtig ist.} \end{cases}$$

Verfügbarkeit

Definition

Die Verfügbarkeit (*Aviability*) ist jene Wahrscheinlichkeit, das System zu einem definierten Zeitpunkt oder in einer bestimmten Zeitspanne im Zustand Z_1 vorzufinden.

Die Zeit, in der das Bauteil funktioniert ist gleich

$$X_T(\omega) = \int_0^T \xi(t,\omega)\, dt$$

Die Verfügbarkeit des einen Werkstückes beträgt

$$\frac{X_T(\omega)}{T}.$$

Sei $P_1(t) =$ Wahrscheinlichkeit, dass sich das System im Zustand Z_1 zur Zeit t befindet. Für den Erwartungswert gilt

$$\mathbb{E}\left[\frac{X_T(\omega)}{T}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{T}\int_0^T \xi(t,\omega)\, dt\right]$$
$$\frac{1}{T}\int_0^T \mathbb{E}\left[\xi(t,\omega)\right]\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T P_1(t)\, dt.$$

Verfügbarkeit

Definition

Die Verfügbarkeit (*Aviability*) ist jene Wahrscheinlichkeit, das System zu einem definierten Zeitpunkt oder in einer bestimmten Zeitspanne im Zustand Z_1 vorzufinden.

Wegen

$$\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\lambda+\rho} \\ \frac{\rho}{\lambda+\rho} \end{pmatrix},$$

und somit erhält man

$$\mathbb{E}\left[\frac{X_T(\omega)}{T}\right] = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\rho}{\lambda+\rho}\,dt = \frac{\rho}{\lambda+\rho}.$$

Das heißt auf lange Zeit gilt

$$\mathbb{E}\left[\frac{X_T(\omega)}{T}\right] = \frac{\rho}{\lambda+\rho}.$$

Zuverlässigkeit eines Systemes mit zwei Bausteinen

Setting:

Gegeben sind zwei Bausteine mit Reparatur:

- Lebensdauerverteilung: exponential verteilt mit Parameter λ;
- Dauer der Reparatur: exponential verteilt mit Parameter ρ;

Es gibt zwei Zustände in denen sich das System befinden kann:

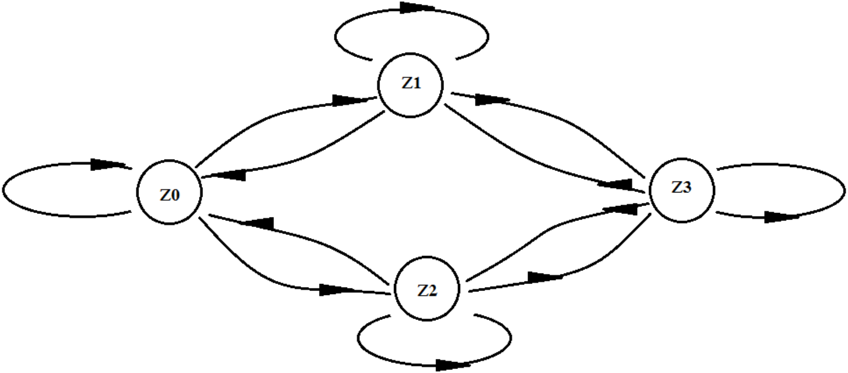
- Z_0: Beide Bauteile sind funktionsuntüchtig;
- Z_1: Erster Bauteil ist funktionstüchtig, zweiter Bauteil ist funktionsuntüchtig;
- Z_2: Erster Bauteil ist funktionsuntüchtig, zweiter Bauteil ist funktionstüchtig;
- Z_3: Beide Bauteile sind funktionstüchtig;

Zuverlässigkeit eines Systemes mit zwei Bausteinen

Übergang	Wahrscheinlichkeit im Zeitintervall $(t, t+\Delta t)$
$Z_0 \rightarrow Z_0$	$1 - 2\rho\Delta t + o(\Delta t)$
$Z_0 \rightarrow Z_1$	$\rho\Delta t + o(\Delta t)$
$Z_0 \rightarrow Z_2$	$\rho\Delta t + o(\Delta t)$
$Z_0 \rightarrow Z_3$	0
$Z_1 \rightarrow Z_0$	$\lambda\Delta t + o(\Delta t)$
$Z_1 \rightarrow Z_1$	$1 - (\lambda + \rho)\Delta t + o(\Delta t)$
$Z_1 \rightarrow Z_2$	0
$Z_1 \rightarrow Z_3$	$\rho\Delta t + o(\Delta t)$

Übergang	Wahrscheinlichkeit im Zeitintervall $(t, t+\Delta t)$
$Z_2 \rightarrow Z_0$	$\lambda\Delta t + o(\Delta t)$
$Z_2 \rightarrow Z_1$	0
$Z_2 \rightarrow Z_2$	$1 - (\lambda + \rho)\Delta t + o(\Delta t)$
$Z_2 \rightarrow Z_3$	$\rho\Delta t + o(\Delta t)$
$Z_3 \rightarrow Z_0$	0
$Z_3 \rightarrow Z_1$	$\lambda\Delta t + o(\Delta t)$
$Z_3 \rightarrow Z_2$	$\lambda\Delta t + o(\Delta t)$
$Z_3 \rightarrow Z_3$	$1 - 2\lambda\Delta t + o(\Delta t)$

Zuverlässigkeit eines Systemes mit zwei Bausteinen



Zuverlässigkeit eines Systemes mit zwei Bausteinen

Sei $p_i(t) =$ Wahrscheinlichkeit, dass das System zur Zeit t im Zustand Z_i ist. Dann gilt

$$\mathbf{P}'(t) = \begin{pmatrix} p_0'(t) \\ p_1'(t) \\ p_2'(t) \\ p_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\rho & \lambda & \lambda & 0 \\ \rho & -(\rho+\lambda) & 0 & \lambda \\ \rho & 0 & -(\rho+\lambda) & \lambda \\ 0 & \rho & \rho & -2\lambda \end{pmatrix} \mathbf{P}(t), \quad t > 0.$$

Zuverlässigkeit eines Systemes mit zwei Bausteinen

Die stationäre Lösung ist der Eigenvektor zum Eigenwert eins, normieren in der Summennorm auf Länge 1. Das heißt die Lösung von folgendem Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} -2\rho & \lambda & \lambda & 0 \\ \rho & -(\rho+\lambda) & 0 & \lambda \\ \rho & 0 & -(\rho+\lambda) & \lambda \\ 0 & \rho & \rho & -2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = 0,$$

und

$$\sum_{i=0}^{3} p_i = 1, \quad p_i \geq 0.$$

Als Lösung erhält man

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{(\lambda+\rho)^2} \begin{pmatrix} \lambda^2 \\ \rho\lambda \\ \rho\lambda \\ \rho^2 \end{pmatrix}.$$

Monte Carlo Simulation

Monte-Carlo-Simulation oder Monte-Carlo-Studie, auch MC-Simulation, ist ein Verfahren aus der Stochastik, bei dem sehr häufig durchgeführte Zufallsexperimente die Basis darstellen. Es wird dabei versucht, mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitstheorie analytisch nicht oder nur aufwändig lösbare Probleme numerisch zu lösen. Als Grundlage ist vor allem das Gesetz der großen Zahlen zu sehen. Die Zufallsexperimente werden im allgemeinen am Computer mit Zufallszahlengeneratoren erzeugt.
Einführungen in Monte Carlo Algorithmen :

- Enrico Zio: The Monte Carlo Simulation Method for System Reliability and Risk Analysis (Springer Series in Reliability Engineering), 2013.
- Müller-Gronbach, Thomas; Novak, Erich; Ritter, Klaus Monte Carlo-Algorithmen. Springer-Lehrbuch. Springer, Heidelberg, 2012.
- Glassermann: Monte Carlo Methods in Financial engineering, (2004).

Zuverlässigkeit eines Systemes mit zwei Bausteinen

Setting:

Gegeben sind zwei Bausteine mit Reparatur:

- Lebensdauerverteilung: exponential verteilt mit Parameter λ;
- Dauer der Reparatur: exponential verteilt mit Parameter μ;

Es gibt zwei Zustände in denen sich das System befinden kann:

- Z_0: Beide Bauteile sind funktionsuntüchtig;
- Z_1: Erster Bauteil ist funktionstüchtig, zweiter Bauteil ist funktionsuntüchtig;
- Z_2: Erster Bauteil ist funktionsuntüchtig, zweiter Bauteil ist funktionstüchtig;
- Z_3: Beide Bauteile sind funktionsuntüchtig;

Zuverlässigkeit eines Systemes mit zwei Bausteinen

Setting:

Gegeben sind zwei Bausteine mit Reparatur:

- Lebensdauerverteilung: Weibull verteilt mit Parametern λ und α;
- Dauer der Reparatur: Reighley verteilt mit Parameter μ;

Problem:

Dieses System lässt sich nicht mehr als Markov system beschreiben - die Weibull verteilung ist nicht gedächtnislos.

Ausweg:

Monte Carlo Simulation

Monte Carlo Simulation

- Spezifikation der einzelnen Komponenten; $\Rightarrow$ Beschreibung jedes Zustandes;
- Genaue Fragestellung: Was möchte man wissen ?
- Wie kann man dies beschreiben ?
- Mathematische Verifizierung:
  - Samplegröße ?
  - Varianzreduzierende Methoden?
  - Gibt es seltene Ereignisse mit hohen Impact?
  - Möglichkeit der Vereinfachung (Ergodizität des dahinterliegenden Prozess)?