# Lid-Driven Cavity: einfacher geht's nicht

**Gleichungen** Inkompressible Navier-Stokes allgemein

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla \bar{p} + \nu \Delta \mathbf{u} + \bar{\mathbf{f}}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

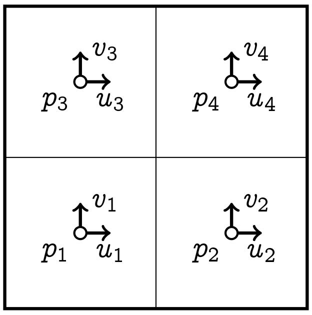
Vorerst mal vereinfacht: stationär, Stokes Flow (schleichende Strömung), keine Volumenkraft

$$\nu \Delta \mathbf{u} = \nabla \bar{p}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Darin steht $\bar{p}$ für $p/\rho$; wir lassen den Überstrich im Folgenden weg. Also bitte beachten: ab jetzt ist $p$ ein mit $\rho$ *skalierter* Druck!

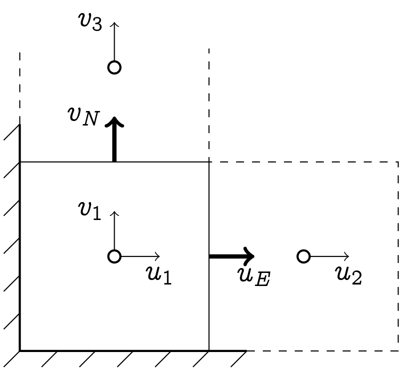
**Rechengebiet, Gittergeometrie** Zweidimensionales Problem, Definitionsgebiet Einheitsquadrat in der $xy$-Ebene. Das Finite-Volumen-Verfahren verwendet vier Kontrollvolumina mit Dicke 1 in $z$-Richtung.

Variable $\mathbf{u}, p$ sind in den Zellzentren definiert: *collocated grid* (Alternative: *staggered grid* mit Druck in den Zellzentren und Geschwindigkeit in der Mitte der Grenzflächen).




## Finite-Volumen-Diskretisierung

**Kontinuitätsgleichung** Anschauliche Formulierung: „In Summe kein Zu- oder Abfluss aus dem Kontrollvolumen".




Für die erste Zelle liegt folgende Situation vor: Durch die Ostfläche strömt Fluid mit Geschwindigkeit $u_E$, durch die gleich große Nordfläche mit $v_N$. An Süd- und Westgrenze sind feste Wände. Das Fluid ist inkompressibel, es befinden sich keine Quellen oder Senken in der Zelle, in Summe muss der Durchfluss gleich Null sein: es folgt also $u_E + v_N = 0$.

Die Geschwindigkeiten $u_E$ und $v_N$ in den Flächenzentren werden als Mittelwert der benachbarten Zellzentrums-Geschwindigkeiten angesetzt.

$$u_E = \frac{u_1 + u_2}{2} \;, \quad v_N = \frac{v_1 + v_3}{2} \;. \tag{1}$$

Die Finite-Volumen-Näherung der Kontinuitätsgleichung für die erste Zelle lautet also

$$\frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{v_1 + v_3}{2} = 0$$

In ähnlicher Weise ergeben sich Gleichungen für die restlichen Zellen. Nach Herausheben des Faktors $\frac{1}{2}$ lauten die vier Gleichungen

$$\begin{aligned}
u_1 + u_2 + v_1 + v_3 &= 0 \\
-u_1 - u_2 + v_2 + v_4 &= 0 \\
u_3 + u_4 - v_1 - v_3 &= 0 \\
-u_3 - u_4 - v_2 - v_4 &= 0
\end{aligned}$$

Beachte dabei: Zellen 3 und 4 haben an der Nordfläche (dem bewegten Deckel) Geschwindigkeit 1, aber tangential – daher kein Durchfluss durch die Grenzflächen!

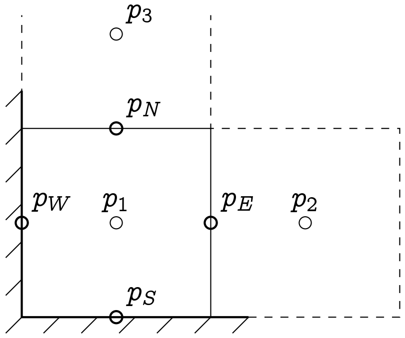
Matrix-Form

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Die Matrix hat Rang 3, das heißt, nur drei Gleichungen sind linear unabhängig. Addition der ersten drei Zeilen ergibt (bis aufs Vorzeichen) die vierte Zeile.

Das lässt sich auch anschaulich verstehen: wenn für drei Zellen die Bedingung „In Summe kein Zu- oder Abfluss“ erfüllt ist, dann (weil das Rechengebiet von festen Wänden begrenzt ist) auch automatisch für die vierte.

**Druckgradient-Term** Anschauliche Interpretation: berechne die vom Druck ausgeübte Kraft auf die Wände des Kontrollvolumens.



An der Ostseite mit Flächeninhalt $A_E = 1/2$ wirkt die Druckkraft $\mathbf{F}_E$ mit Betrag $p_E A_E$ in Richtung des Ostflächen-Normalvektors. Wir interpolieren $p_E$ als Mittelwert der benachbarten Zellzentrums-Drücke.

$$\mathbf{F}_E = p_E A_E \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{p_1 + p_2}{2} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

In gleicher Weise berechnen wir die Kräfte auf die anderen Grenzflächen. Dabei setzen wir auch $p_N$ als Mittelwert an; für die Wandflächen verwenden wir die Randbedingung „Gradient normal zur Wand ist Null" und setzen dementsprechend Randdruck gleich Zentrumsdruck.

$$\mathbf{F}_N = p_N A_N \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{p_1 + p_3}{2 \cdot 2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_W = p_W A_W \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{p_1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_S = p_S A_S \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{p_1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Die Summe aller Flächenkräfte ist die Finite-Volums-Diskretisierung des $\nabla p$-Terms. (Wir rechnen mit dem skalierten Druck, diskretisieren somit den $\nabla \bar{p}$-Term und berechnen eigentlich die mit $\rho$ skalierte Kraft $\bar{\mathbf{F}}$ – aber darauf kommt es uns im Moment nicht an.) Für die erste Zelle lautet die Diskretisierung

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_N + \mathbf{F}_W + \mathbf{F}_S = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} p_2 - p_1 \\ p_3 - p_1 \end{bmatrix} \quad .$$

Ebenso ergeben sich die Terme für die anderen Zellen. Es ist günstig, zuerst die vier $x$-Komponenten und dann die $y$-Komponenten anzuschreiben:

$$\begin{array}{ll}
x\text{-Komponenten} & \frac{1}{4}(p_2 - p_1) \\
 & \frac{1}{4}(p_2 - p_1) \\
 & \frac{1}{4}(p_4 - p_3) \\
 & \frac{1}{4}(p_4 - p_3) \\
y\text{-Komponenten} & \frac{1}{4}(p_3 - p_1) \\
 & \frac{1}{4}(p_4 - p_2) \\
 & \frac{1}{4}(p_3 - p_1) \\
 & \frac{1}{4}(p_4 - p_2)
\end{array}$$

In der Matrixform erkennt man: die Matrix ist die Transponierte der Matrix des Divergenzterms!

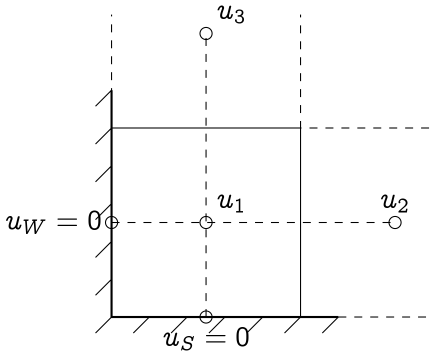
$$-\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_3 \end{bmatrix} \tag{3}$$

**Laplace-Operator** In kartesischen Koordinaten gilt

$$\Delta \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix} \quad ,$$

der Laplace-Operator wirkt also auf die beiden Komponenten. Im Finiten-Volumen-Verfahren werden $\Delta u$ und $\Delta v$ über die Kontrollvolumina integriert, wobei das Volumsintegral mittels Gaußschem Integralsatz in ein Oberflächenintegral umgewandelt wird.

$$\int_V \Delta u \, dV = \int_S \nabla u \cdot \mathbf{n} \, dS$$




Der Gradient $\nabla u$ an den Grenzflächen wird durch Differenzenformeln genähert. Für die Ostfläche der ersten Zelle ist

$$\nabla u \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = u_x \approx \frac{u_2 - u_1}{\delta x} = 2(u_2 - u_1) \; .$$

Multipliziert mit dem Flächeninhalt $A_E = 1/2$ ergibt das den Beitrag der Ostfläche zu $(u_2 - u_1)$. An der Westfläche gilt die Randbedingung $u = 0$. Die einseitige Differenzenformel approximiert

$$u_x \approx \frac{u_1 - 0}{\delta x} = 4u_1$$

Hier zeigt der Oberflächennormalvektor aber in die negative $x$-Richtung, daher ist $\nabla u \cdot \mathbf{n} = -u_x$. Multipliziert mit dem Flächeninhalt ergibt sich der Westflächen-Beitrag zu $-2u_1$.

Für Nord- und Südfläche treten die $y$-Komponenten von $\nabla u$ auf. Insgesamt lautet der diskretisierte $\Delta u$-Term der ersten Zelle

$$\Delta u_1 \approx -6u_1 + u_2 + u_3$$

Eine ähnliche Formel gilt für Zelle 2.

In den Zellen 3 und 4 ist die Nordwand der bewegte Deckel mit Wandgeschwindigkeit 1 in $x$-Richtung. Die einseitige Differenzenformel für $u_y$ lautet daher in Zelle 3

$$u_y \approx \frac{1 - u_3}{\delta x} = 4 - 4u_3$$

Zusammengefasst ergibt sich die Finite-Volumen-Approximation von $\Delta u$

$$\begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \\ \Delta u_4 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -6u_1 + u_2 + u_3 \\ u_1 - 6u_2 + u_4 \\ u_1 - 6u_3 + u_4 \\ u_2 + u_3 - 6u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -6 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Ebenso ergibt sich die Diskretisierung für $\Delta v$, nur treten hier keine Randterme auf (weil $v$ an allen vier Rändern Null ist).

$$\begin{bmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \\ \Delta v_4 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -6 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -6 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

### Das vollständig angeschriebene Gleichungssystem

Es liegen 12 Unbekannte vor und dem entsprechend 12 Gleichungen. Hier das vollständige System. (Hier ist der Einfachheit halber noch $\nu = 1$ gesetzt.)

$$\begin{bmatrix} -6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -6 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Es lässt sich übersichtlicher in Block-Matrixform anschreiben:

$$\begin{bmatrix} A & \frac{1}{4}B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix}$$

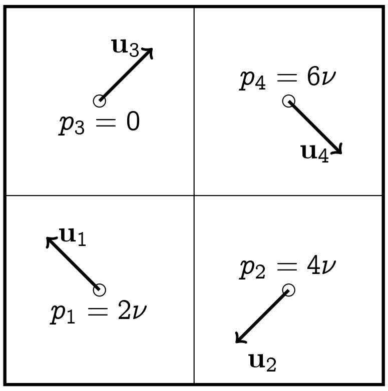
Dieses System hat eine spezielle Struktur. Die Matrix $A$ hat ebenfalls Blockstruktur.

$$A = \begin{bmatrix} \nu\Delta & 0 \\ 0 & \nu\Delta \end{bmatrix}$$

Dabei steht $\Delta$ für die Diskretisierung des Laplace-Operators, das ist die Matrix aus (4). Die Matrizen $B$ und $B^T$ diskretisieren Gradient- und Divergenzterme gemäß der Gleichungen (3) und (2).

Für unser Mickymaus-Problem ist die rechnerische Lösung des gesamten $12 \times 12$-Systems kein großer Aufwand. Ein Lösungsvektor lautet

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} \\ 2\nu \\ 4\nu \\ 0 \\ 6\nu \end{bmatrix}$$




Dabei ist noch zu beachten: Das Gleichungssystem ist singulär, die Druck-Lösung ist nur bis auf eine frei wählbare Konstante bestimmt. Hier ist $p_3 = 0$ gesetzt.

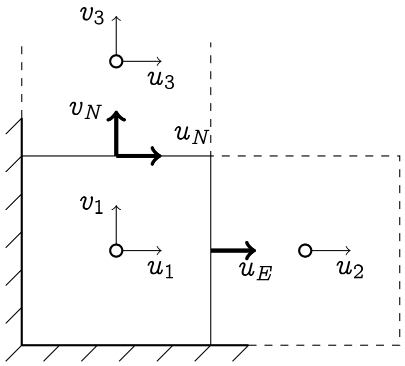
OpenFOAM bringt größenordnungsmäßig ähnliche, aber nicht die gleichen Ergebnisse. Die Strömung ist nicht so symmetrisch, die oberen zwei Zellen haben höhere $u$-Komponenten. Das liegt daran, dass OpenFOAM die Geschwindigkeiten in den Flächenzentren etwas anders interpoliert als das Gleichung (1) tut.

Bei einer realistischen Simulation wird statt des gekoppelten Systems iterativ und schrittweise vorgegangen. Siehe folgendes Kapitel.

**Nichtlinearer Term, Konvektionsterm** Differentielle Form $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$. In Integralform für die $u$-Komponente

$$\int_V \nabla \cdot \left( u \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right) dV = \int_S u \, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Für das Oberflächenintegral sind – wie beim Divergenztern – Die Geschwindigkeiten in den Flächenzentren maßgeblich




Für die erste Zelle ist das Oberflächenintegral eine Summe über Ost- und Nordfläche. Die Beiträge sind (Interpolation gemäß Gleichung (1))

$$A_E u_E^2 + A_N u_E v_N = h(u_E^2 + \; u_E v_N) = \frac{1}{2} \left( \frac{u_1 + u_2}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{u_1 + u_3}{2} \right) \left( \frac{v_1 + v_3}{2} \right)$$

Das ergibt *nichtlineare* Terme im Gleichungssystem. *Linearisierung* nach der Faustregel „transportierte Größe vom alten Zeit- (oder Iterations-) schritt". Das heißt,

$$\int_S u \, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS \approx \int_S u^{\text{alt}} \, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS \approx \frac{1}{8} \left[ (u_1 + u_2)^{\text{alt}} (u_1 + u_2) + (u_1 + u_3)^{\text{alt}} (v_1 + v_3) \right]$$

## Iterative Lösung des Gleichungssystems

Noch einmal das Gleichungssystem für schleichende Strömung (skalierter Druck $p = p/\rho$):

$$\begin{aligned} \nu \Delta \mathbf{u} &= \nabla p \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{aligned}$$

Wenn $p$ schon bekannt wäre, dann ließe sich $\mathbf{u}$ berechnen. In diskretisierter Form lautet das Gleichungssystem für $\mathbf{u}$

$$\begin{bmatrix} \nu \Delta & 0 \\ 0 & \nu \Delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{4} B p$$

Es zerfällt in zwei getrennte Systeme für die $u$- und $v$-Komponenten.