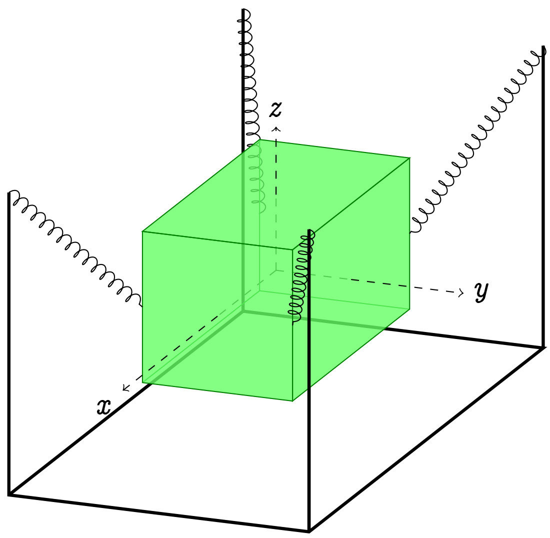
Schwingungen eines elastisch gelagerten Motorblockes

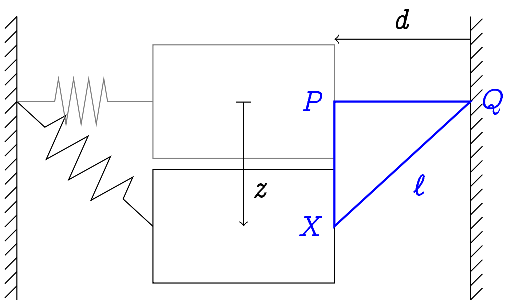
So sieht unser Modell aus:



Quader mit Abmessungen $80 \times 80 \times 100\,\mathrm{mm}$; Masse $2\,\mathrm{kg}$. Vier gleich starke Federn, jeweils $100\sqrt{2}\,\mathrm{mm}$ entspannte Länge in der xy-Ebene, Steifigkeit je $1000\,\mathrm{N/m}$. Aufgrund Schwerkraft ($g = 9{,}81\,\mathrm{ms}^{-2}$) Absenkung in Gleichgewichtslage.

Ein Freiheitsgrad, Gleichgewichtslage

Die z-Koordinate verläuft vertikal, Nullpunkt auf Höhe der Aufhängepunkte P, Q. Am Dreieck PQX erkennt man: Bei einer Absenkung z ist die Länge ℓ der Hypotenuse XQ gleich $\ell = \sqrt{z^2 + d^2}$.



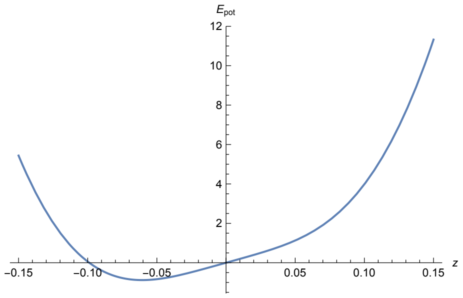
Jede Feder verlängert sich dem entsprechend um $\Delta\ell = \sqrt{z^2 + d^2} - d$. Die potentielle Energie der gedehnten Federn ist somit

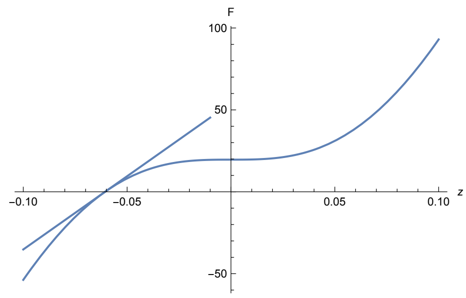
$$V_{\text{Federn}} = \frac{c}{2}(\Delta\ell)^2$$

Aufgaben:

1. Stellen Sie die potentielle Energie als Funktion von z graphisch dar und finden Sie die Gleichgewichtslage als Minimum der potentiellen Energie.

2. Stellen Sie auch den Verlauf der durch das Potential gegebenen Kraft F dar ($F =$ Ableitung von V nach z). Die Tangente in der Gleichgewichtslage ist die *linearisierte* Federkennlinie. Wie lautet die zugehörige Federkonstante? Wie groß ist die zugehörige Schwingungsfrequenz?





Lösungen: Gleichgewichtslage bei $z = -0.0606291\,\mathrm{m}$. Linearisierte Federsteifigkeit $c = 894.398\,\mathrm{N/m}$. Schwingungsfrequenz $\nu = 3.36566\,\mathrm{Hz}$

Merke: Gleichgewichtslage bestimmt durch

$$\frac{dV(z)}{dz} = 0$$

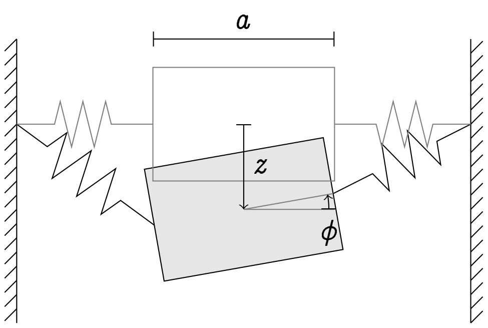
Steifigkeit bei kleinen Schwingungen um Gleichgewichtslage

$$c = \left.\frac{d^2V(z)}{dz^2}\right|_{z=z_{\min}}$$

Zwei Freiheitsgrade, kleine Schwingungen

Unabhängige Koordinaten z und ϕ.

In der Näherung $\phi \ll 1$ bewirkt ϕ eine Verschiebung des Feder-Angriffspunktes um $\Delta z = \pm\frac{a}{2}\phi$



Kinetische Energie setzt sich zusammen aus Translations- und Rotationsanteil:

$$T = \frac{m}{2}\dot{z}^2 + \frac{J}{2}\dot{\phi}^2$$

mit Massenträgheitsmoment $J = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$.

Potentielle Energie (c ist die Gesamt-Steifigkeit der Federn links und rechts, deswegen der Faktor $\frac{1}{4}$)

$$V = mgz + \frac{1}{4}c\left(\sqrt{(z - \frac{a}{2}\phi)^2 + d^2} - d\right)^2 + \frac{1}{4}c\left(\sqrt{(z + \frac{a}{2}\phi)^2 + d^2} - d\right)^2$$

Bei kleinen Schwingungen um die Ruhelage gilt eine Schwingungsgleichung mit Massen- und Steifigkeitsmatrix; die Massenmatrix enthält die zweiten Ableitungen der kinetischen Energie, die Steifigkeitsmatrix zweite Ableitungen der potentiallen Energie, ausgewertet in der Gleichgewichtslage.

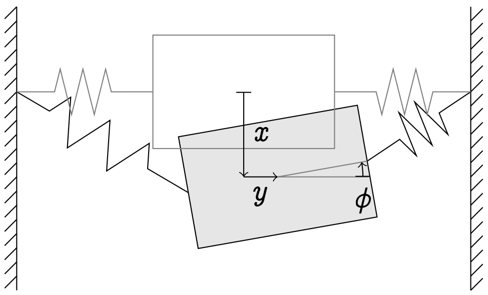
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{z}^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{z} \partial \dot{\phi}} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{z} \partial \dot{\phi}} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\phi}^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \phi} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \phi} & \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z \\ \phi \end{bmatrix} = 0$$

Bei unserem Beispiel verschwinden die gemischten Ableitungen in Massen- und Steifigkeitsmatrix; die Gleichungen *entkoppeln*.

Mit unseren Zahlenwerten ergibt sich für die ϕ-Schwingung $\nu = 4.55207\,\text{Hz}$

Drei Freiheitsgrade, kleine Schwingungen

Unabhängige Koordinaten z, y, ϕ:



Kinetische Energie:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{J}{2}\dot{\phi}^2$$

Potentielle Energie:

$$V = mgz + \frac{1}{4}c\left(\sqrt{(z - \frac{a}{2}\phi)^2 + (d-y)^2} - d\right)^2 + \frac{1}{4}c\left(\sqrt{(z + \frac{a}{2}\phi)^2 + (d+y)^2} - d\right)^2$$

Diesmal verschwinden nicht alle gemischten Ableitungen in der Steifigkeitsmatrix. In unserem Fall, mit gerundeten Zahlenwerten, ergibt sich Schwingungsgleichung

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00273333 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 894.398 & 0 & 0 \\ 0 & 3429.21 & -66.5705 \\ 0 & -66.5705 & 2.236 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z \\ y \\ \phi \end{bmatrix} = 0$$

Die z-Koordinate ist immer noch entkoppelt, es sind reine Auf-Ab-Schwingungen möglich. Aber y und ϕ sind gekoppelt: Die Masse kann nicht reine y-Translationsschwingungen ausführen. Sie schaukelt hin und her: y-Auslenkung bewirkt zugleich ϕ-Auslenkung.

Aus den Eigenwerten ergeben sich Schwingungsfrequenzen $\nu = 7.5864$ Hz, 3.36566 Hz, 2.56893 Hz. Die mittlere Frequenz gehört zur z-Schwingung und ist gleich wie vorher, die beiden anderen sind $y\phi$-Schwingungsformen.

Aufgaben:

3. Definieren Sie M und C mit den obigen Zahlenwerten und lassen Sie MATLAB die Eigenwerte und Schwingungsfrequenzen berechnen.

4. Implementieren Sie das Zwei- und/oder Drei-Freiheitsgrade-Modell in SimMechanics. Regen Sie Schwingungen an; versuchen Sie, möglichst gut die reinen Eigenschwingungsformen anzuregen. Vergleichen Sie mit den Werten dieser Unterlagen.