Prüfungsfragen zu Differentialgleichungen (Termine März und Mai 2015)

1. Aufgabe: **Gewöhnliche Differentialgleichungen**

   (a) Gegeben ist für $y = y(x)$ die Differentialgleichung mit Anfangsbedingung

   $$y' = -4y + 2x \qquad y(0) = 1$$

   Berechnen Sie mit $h = \frac{1}{2}$ drei Schritte des expliziten Euler-Verfahrens.

   (b) Gegeben sind für $y = y(x)$ folgende Differentialgleichung mit Anfangsbedingungen:

   $$y''' - 4xy' + y = 0 \qquad y(0) = 3 \qquad y'(0) = 2 \qquad y''(0) = 1$$

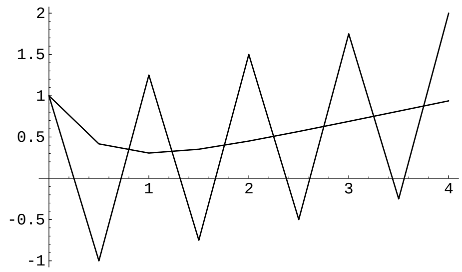
   Formulieren Sie das entsprechende System von Differentialgleichungen erster Ordnung und die zugehörigen Anfangsbedingungen.

   (c) Gegeben ist für $y_1 = y_1(x)$ und $y_2 = y_2(x)$ das System von Differentialgleichungen erster Ordnung

   $$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -y_1 - 1000y_2 \end{aligned}$$

   Geben Sie ein Maß für die Steifigkeit dieses Systems an.

   (d) Berechnen Sie für die Angabe (a) einen Schritt des *impliziten* Euler-Verfahrens. Weitere Schritte des expliziten und impliziten Euler-Verfahrens sind nebenstehend grafisch dargestellt. Erklären Sie das unterschiedliche Verhalten.

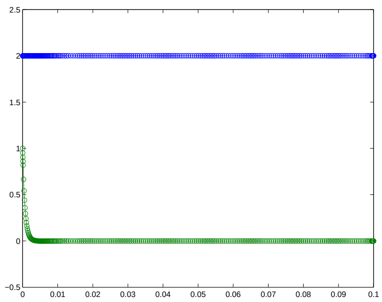


2. Aufgabe: **Gewöhnliche Differentialgleichungen**

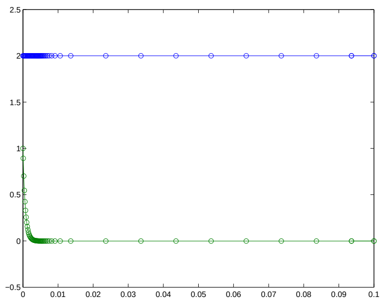
   Gegeben ist ein System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung für $z_1 = z_1(x),\ z_2 = z_2(x)$:

   $$\begin{aligned} z_1' &= z_2 \\ z_2' &= 500z_2(1 - z_1^2) - z_1 \end{aligned}$$

   (a) Die MATLAB-Löser ode45 und ode23s liefern die grafische Darstellungen einer Lösung:



ode45



ode23s

   Erklären Sie: Wofür steht „ode“, was bedeuten „45“ und „23“, wofür steht das „s“?

   In diesem Fall berechnet ode23s deutlich weniger Zwischenpunkte als ode45 (nämlich nur 55 im Vergleich zu 413). Welche Eigenschaft vermuten Sie für dieses System?

   (b) Das System ist aus einer Differentialgleichung zweiter Ordnung für $y = y(x)$ durch Substitution $y = z_1,\ y' = z_2$ entstanden. Wie lautet die Differentialgleichung für $y(x)$?

   (c) Ein Maß für die Steifigkeit des Systems lässt sich mit Hilfe der Eigenwerte der Jacobimatrix angeben. Berechnen Sie die Jacobimatrix des Systems und werten Sie diese für $z_1 = 2$ und $z_2 = 8,189$ aus. (Die nächste Teilaufgabe erlaubt eine Kontrolle Ihrer Ergebnisse!)

   (d) Für $z_1 = 2$ und $z_2 = 8,189$ lautet die Jacobimatrix $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16379 & -1500 \end{bmatrix}$.

   Berechnen Sie das charakteristische Polynom und daraus die Eigenwerte. (Ganzzahlige Lösungen!) Geben Sie ein Maß für die Steifigkeit des Differentialgleichungs-Systems an.