1. Aufgabe: **Überbestimmte Systeme**

Fehlerbehaftete Messungen zur Bestimmung der Parameter x und y eines Systems liefern ein überbestimmtes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -x+3y &= 11 \\ 4x-6y &= 5 \\ 2x-y &= -2 \\ 2x+2y &= 10 \end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie für die zwei Wertepaare

$$(1.)\quad [x;y]=[3;\,2] \quad \text{und} \quad (2.)\quad [x;y]=[4;\,3]$$

jeweils den Fehlervektor (Residuums-Vektor). In welchem Sinn ist das eine oder das andere Wertepaar eine bessere Ausgleichslösung?

(b) Stellen Sie die Normalengleichungen dieses Systems auf und finden Sie deren Lösung. In welchem Sinn ist die Lösung der Normalengleichungen eine „Lösung" des ursprünglichen überbestimmten Systems?

(c) Für die Matrix A dieses Gleichungssystems liegt die QR-Zerlegung vor. Bestimmen Sie damit die kleinste-Quadrate-Ausgleichslösung des Systems.

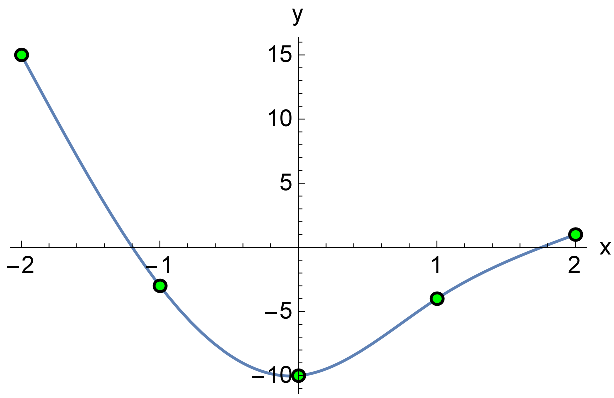
$$Q=\begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}8 \\ -0{,}8 & -0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ -0{,}4 & 0{,}2 & -0{,}8 & 0{,}4 \\ -0{,}4 & 0{,}8 & 0{,}2 & -0{,}4 \end{bmatrix}, \quad R=\begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(d) Der Rechenweg in Aufgabe (c) lässt (nach Multiplikation mit Q^T) die letzten beiden Gleichungen weg und bestimmt x und y aus den ersten beiden Gleichungen. Einfacher wäre, gleich im Originalsystem die überzähligen Gleichungen wegzulassen. Warum ist das nicht zielführend?

2. Aufgabe **Interpolation, numerische Integration**

Die gegebenen Datenpunkte sind in der Abbildung durch einen natürlichen kubischen Spline $y=f(x)$ verbunden:

x	y
-2	15
-1	-3
0	-10
1	-4
2	1



$$f(x)=\begin{cases} 2x^3+12x^2+4x-9 & -2 \le x < -1 \\ x^3+9x^2+x-10 & \text{für}\quad -1 \le x < 0 \\ p_3 & 0 \le x < 1 \\ x^3-6x^2+16x-15 & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

(a) Das dritte Polynom ist nur in der allgemeinen Form $p_3(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ gegeben. Formulieren Sie die Bedingungen, die p_3 erfüllen muss, um Teil eines natürlichen kubischen Splines zu sein. Bestimmen Sie daraus die Koeffizienten a, b, c und d. (Hinweis: wenig Rechenaufwand, wenn Sie die passenden Gleichungen wählen!)

(b) Verwenden Sie die gegebenen Datenpunkte und bestimmen Sie mit der zusammengesetzten Trapezregel eine Näherung für

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$$

Rechnen Sie zuerst mit Schrittweite $h=2$, dann mit $h=1$.

(c) Bestimmen Sie zu den gegebenen Datenpunkten eine kleinste-Quadrate-Ausgleichsgerade.

3. Aufgabe: **Gewöhnliche Differentialgleichungen**

(a) Gegeben ist für $y = y(x)$ die Differentialgleichung mit Anfangsbedingung

$$y' = -2y(2+x) \qquad y(0) = 1$$

Berechnen Sie mit $h = \frac{1}{2}$ drei Schritte des expliziten Euler-Verfahrens.

(b) Gegeben ist für $y = y(x)$ folgende Differentialgleichung mit Anfangsbedingungen:

$$3y''' + 4y'' - 2xy = 0 \qquad y(1) = 1 \qquad y'(1) = 2 \qquad y''(1) = 5$$

Formulieren Sie das entsprechende System von Differentialgleichungen erster Ordnung und die zugehörigen Anfangsbedingungen.

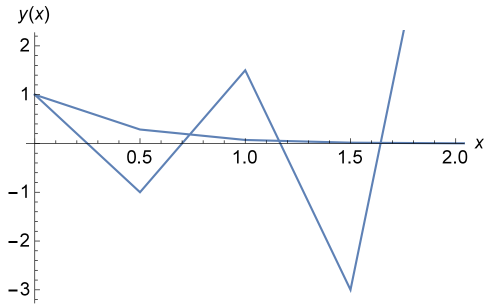
(c) Gegeben ist für $y_1 = y_1(x)$ und $y_2 = y_2(x)$ das nebenstehende System von Differentialgleichungen erster Ordnung. Geben Sie ein Maß für die Steifigkeit dieses Systems an.

$$\begin{aligned} y_1' &= -1011y_1 + 1005y_2 \\ y_2' &= 1005y_1 - 1011y_2 \end{aligned}$$

(d) Das *implizite* Euler-Verfahren verwendet für eine Differentialgleichung der Form $y'(x) = f(x, y)$ den Rechenschritt

$$y_{i+1} = y_i + h\,f(x_{i+1}, y_{i+1}) \ .$$

Berechnen Sie für die Angabe (a) drei Schritte mit diesem Verfahren. Weitere Schritte des expliziten und impliziten Euler-Verfahrens sind nebenstehend grafisch dargestellt. Erklären Sie das unterschiedliche Verhalten.



4. Aufgabe **Lineare Gleichungssysteme und Eigenvektoren**

Gegeben ist das System $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ und die Zerlegung $A = L \cdot R$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}, \qquad A = L \cdot R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

(Hinweis: Die Angaben sind so gewählt, dass in den Endergebnissen von a-c nur ganze Zahlen auftreten)

(a) Verwenden Sie $A = L \cdot R$, um die Determinante $\det A$ zu berechnen. Warum ist es nur für kleine Matrizen sinnvoll, die Determinante durch Entwickeln nach Unterdeterminanten zu berechnen?

(b) Verwenden Sie $A = L \cdot R$ und bestimmen Sie damit die Lösung $\mathbf{x}$.

(c) Berechnen Sie ausgehend von $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ iterativ Näherungslösungen $\mathbf{x}^{(1)}$ und $\mathbf{x}^{(2)}$ mit dem Gauß-Seidel-Verfahren.

(d) Berechnen Sie, diesmal vom Startvektor $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ausgehend, zwei Schritte der Vektoriteration zur Näherung eines Eigenvektors von A und des zugehörigen Eigenwertes.
(Hinweis: Am besten skalieren Sie nach jedem Schritt mit Division durch die 1. Komponente, dann erhalten sie relativ „schöne" Zahlen.)

Punkteschlüssel:

Beispiel	1	2	3	4
Punkte	2; 3; 3; 2	4; 3; 3	2; 3; 2; 3	2; 3; 3; 2