170 004 Numerische Methoden I — Schriftliche Prüfung
2. Oktober 2012 — 12:00-14:00 (120 min)

Name	Matrikelnummer

Mündliche Prüfung: Bitte markieren Sie Ihren Wunschtermin!

- ☐ Donnerstag, 4. Okt., 13–15 Uhr
- ☐ Montag, 8. Okt, 9–12 Uhr
- ☐ Dienstag, 9. Okt, 9-12 Uhr
- ☐ Ich brauche einen anderen Termin und melde mich bei Dr. Brand

Bei dieser Prüfung können ein Taschenrechner und die Formelsammlungen der Mathematik-Vorlesungen verwendet werden. Eine Formelsammlung zu Numerischen Methoden liegt bei.

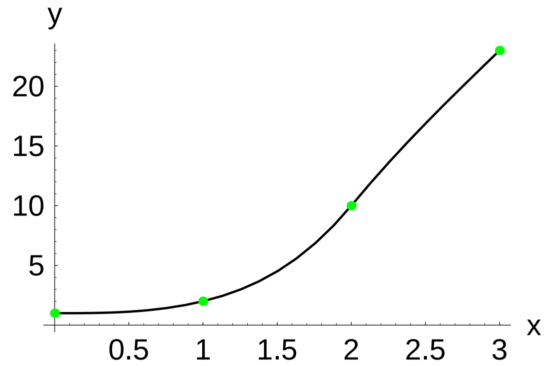
Darüber hinaus dürfen keine schriftlichen Unterlagen verwendet werden.

Beispiel	Punkte	Note	Prüfer
1			
2			
3			
4			
Gesamt			

1. Aufgabe

   Die gegebenen Datenpunkte sind in der Abbildung durch eine glatte Kurve $y = f(x)$ verbunden:

x	y
0	1
1	2
2	10
3	23



$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & 0 \le x < 1 \\ 2x^3 - 3x^2 + 3x & \text{für} \quad 1 \le x < 2 \\ x^3 - 9x^2 + 39x - 40 & 2 \le x < 3 \end{cases}$$

   (a) Prüfen Sie nach, ob die hier definierte Funktion **alle** Eigenschaften erfüllt, die ein **natürlicher kubischer Spline** hat.

   (b) Extrapolieren sie polynomial nach Newton oder Lagrange aus den ersten drei Datenpunkten den Funktionswert für $x = -1$.

   (c) Bestimmen Sie aus den gegebenen Datenpunkten mit der zusammengesetzten Trapezregel eine Näherung für

$$\int_0^3 f(x)dx$$

2. Aufgabe

   Eine Messgröße z hängt von Eingabevariablen x und y ab. Der Zusammenhang lässt sich annähernd durch

$$z = a + bx + cy$$

   modellieren. Die Parameter a,b und c des Modells sollen bestimmt werden. Dazu liegen folgende Daten vor:

x	0	1	1	−2	−5
y	0	1	−3	4	−2
z	−6	1	7	16	−8

   (a) Stellen Sie ein überbestimmtes Gleichungssystem für die unbekannten Parameter a,b und c auf.

   (b) Lösen Sie das System mit der Methode der Normalengleichungen.
   Hinweis: Einfaches Gleichungssystem, „schöne“ Ergebnisse.

   (c) Hier sind drei mögliche Modelle (eines davon ist das Ergebnis aus Punkt b):

   M1: $z = 3 + 1x + 2y$ M2: $z = \frac{12}{5} - \frac{x}{10} + \frac{5y}{4}$ M3: $z = -\frac{8}{3} - \frac{2x}{3} + \frac{13y}{3}$

   In welchem Sinn beschreiben jeweils M1, M2 oder M3 die Daten besser?

3. Aufgabe

(a) Überprüfen Sie für die 3×3-Matrix A und Vektoren $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{x}$,

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 29 & -8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -41 & 12 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ob es sich um Eigenvektoren handelt und, falls ja, geben Sie zugehörige Eigenwerte an.

(b) Wählen Sie $\mathbf{x}^{(0)} = [1, -4, -15]^T$ als Startvektor und rechnen Sie für die Matrix A die ersten beiden Näherungen $\mathbf{x}^{(1)}$ und $\mathbf{x}^{(2)}$ einer einfachen Vektoriteration. (Am besten skalieren Sie nach jedem Schritt mit Division durch die 1. Komponente.)

Wie lauten Ihre Näherungen für Eigenwert und Eigenvektor?

(c) Gegeben sind folgende Matrizen:

$$R = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Welche Matrizen sind symmetrisch ? ________________

orthogonal ? ________________

diagonal ? ________________

4. Aufgabe

Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$-\frac{x^3}{6} + 2y^2x - 4yx + 2x + 2 = 0$$
$$8x^3 - 2x - y^3 + 3y^2 - 2y - 1 = 0$$

(a) Wie lautet die Jacobi-Matrix für das gegebene Gleichungssystem?

(b) Wie ist die Jacobi-Matrix einer vektorwertigen Funktion $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ allgemein definiert?

(c) Ausgehend von den Startwerten $x^{(0)} = 0$; $y^{(0)} = 0$ bestimme man mit Hilfe des Newton-Raphson Verfahrens $x^{(2)}$ und $y^{(2)}$! (Wenn Sie korrekt rechnen, lassen sich auftretende lineare Gleichungssysteme „einfach“ lösen)

Punkteschlüssel:

Beispiel	1	2	3	4
Punkte	4; 3; 3	4; 3; 3	4; 4; 2	3; 2; 5