Prüfungsfragen der Juni-Termine 2010 und 2011

1. Aufgabe

   (a) Was versteht man unter einem Eigenvektor $\mathbf{x}$ und dem zugehörigen Eigenwert λ einer $n \times n$-Matrix A?

   (b) Überprüfen Sie für die 3×3-Matrix A und Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$,

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -7 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -17 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

   ob es sich um Eigenvektoren handelt und, falls ja, geben Sie zugehörige Eigenwerte an.

   (c) Für die Matrix A ist die LR-Zerlegung und eine rechte Seite $\mathbf{b}$ gegeben.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{15}{8} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 3 & -7 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

   Lösen Sie damit das Gleichungssystem $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$

2. Aufgabe

   Gegeben ist ein überbestimmtes Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ für

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

   (a) Drei Lösungsvektoren stehen zur Auswahl:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \frac{1}{42} \begin{bmatrix} 101 \\ 41 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 27 \\ 12 \end{bmatrix}$$

   Bestimmen Sie jeweils den Restvektor (Residuumsvektor) $\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}$.

   (b) Jeder der drei Vektoren ist, je nach Betrachtungsweise, eine „beste" Lösung. Erläutern und begründen Sie diese Aussage.

   (c) Für die Matrix A des Gleichungssystems ist die QR-Zerlegung gegeben:

$$Q = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 7 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Lösen Sie das überbestimmte System unter Verwendung dieser Zerlegung.

3. Aufgabe

   Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -\frac{x^3}{48} + y^2 x + 2 &= 0 \\ x^3 - x + y^3 - y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

   (a) Wie ist die Jacobi-Matrix einer vektorwertigen Funktion $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ allgemein definiert?

(b) Wie lautet die Jacobi-Matrix für das gegebene Gleichungssystem?

(c) Ausgehend von der Näherungslösung $x^{(0)} = 0;\ y^{(0)} = 1$ bestimme man mit Hilfe des Newton-Raphson Verfahrens $x^{(2)}$ und $y^{(2)}$! (Wenn Sie korrekt rechnen, lassen sich auftretende lineare Gleichungssysteme „einfach“ lösen)

4. Aufgabe

Gegegeben sind folgende Datenpunkte

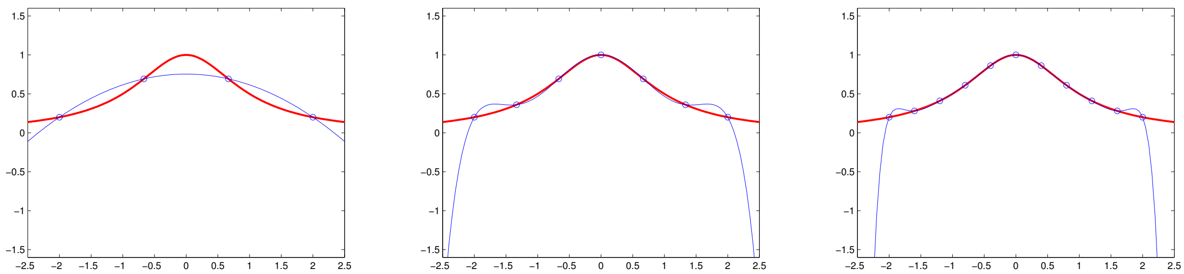
$$\{(0;\ 0{,}01), (0{,}5;\ 0{,}45), (1;\ 0{,}85), (1{,}25;\ 0{,}95), (1{,}5;\ 0{,}99)\}\,.$$

(a) Welchen Grad hat ein Lagrange-Interpolationspolynom, das diese Punkte interpoliert?

(b) Schreiben Sie die Bedingungen auf, die eine kubische Spline-Funktion durch diese Punkte erfüllt.

(c) Welche Gleichungen legen eine Regressionsgerade durch die obigen Punkte fest? Schreiben Sie das zugehörige Gleichungssystem auf.

(d) In den folgenden Bildern wurde eine Kurve interpoliert. Dabei war jeweils Zahl der Datenpunkte 4, 7 und 11. Erklären Sie anhand der Bilder das Runge-Pänomen.



5. Aufgabe

(a) Integrieren Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{4x+1}$$

von 0 bis 1 mit den Stützstellen $0;\ 0,25;\ 0,5;\ 0,75;\ 1$ einmal mit der zusammengesetzen Simpson-Regel und einmal mit der zusammengesetzen Trapezregel.

(b) Falls man den Fehler auf $\frac{1}{16}$ des ursprünglichen Fehlers reduzieren möchte, in welchem Abstand h müssten die äquidistanten Datenpunkte dann bei der zusammengesetzten Simpson- bzw. Trapezregel liegen? (Begründen Sie Ihre Antwort mit der Ordnung desFehlerterms.)

(c) Ist die Aussage „je mehr äquidistante Datenpunkte, desto besser die Näherung“ eine gute Richtlinie (Zutreffendes ankreuzen)?

	JA	NEIN
für zusammengesetzten Newton-Cotes-Formeln	◯	◯
bei Lagrange-Interpolation	◯	◯
bei Interpolation nach Newton	◯	◯
bei Spline-Interpolation	◯	◯

(Die Formulierung „gute Richtlinie“ in der Fragestellung erlaubt absichtlich etwas Spielraum bei der Interpretation. Je nachdem, wie Sie es begründen, könnte bei einer Frage sowohl „Ja“ als auch „Nein“ als korrekte Antwort akzeptiert werden. Sehen Sie das, was Sie ankreuzen, als Diskussionsgrundlage für die mündliche Prüfung!)

6. Aufgabe

(a) Überprüfen Sie für die 3×3-Matrix A und Vektoren $\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w},\ \mathbf{x}$,

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 29 & -8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -41 & 12 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ob es sich um Eigenvektoren handelt und, falls ja, geben Sie zugehörige Eigenwerte an.

(b) Wählen Sie $\mathbf{x}^{(0)} = [1, -4, -15]^T$ als Startvektor und rechnen Sie für die Matrix A die ersten beiden Näherungen $\mathbf{x}^{(1)}$ und $\mathbf{x}^{(2)}$ einer einfachen Vektoriteration. (Am besten skalieren Sie nach jedem Schritt mit Division durch die 1. Komponente.)

Wie lauten Ihre Näherungen für Eigenwert und Eigenvektor?

In diesem Beispiel liegen die ersten beiden Näherungen noch weit weg von den gesuchten Größen. Erst ab dem dritten Schritt lässt sich Konvergenz erkennen. Zur Kontrolle hier weitere Zahlenwerte:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x}^{(2)} &= [12{,}25;\ 0{,}25;\ -17{,}75]^T, & \mathbf{x}^{(3)} &= [1;\ 0{,}02;\ -1{,}45]^T \\ A\mathbf{x}^{(3)} &= [10{,}18;\ 0{,}02;\ -15{,}22]^T, & \mathbf{x}^{(4)} &= [1;\ 0{,}002;\ -1{,}495]^T \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

mit weiteren Schritten nähern sich die Werte rasch dem Grenzwert

$$A\mathbf{x} = [10;\ 0;\ -15]^T, \qquad \mathbf{x} = [1;\ 0;\ -\tfrac{3}{2}]^T$$

(c) Gegeben sind folgende Matrizen:

$$R = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Welche Matrizen sind symmetrisch ? ________________

orthogonal ? ________________

diagonal ? ________________

7. Aufgabe

Planeten durchlaufen elliptische Bahnen; bei jeder Ellipse steht die Sonne in einem Brennpunkt (1. Keplersches Gesetz). Gesucht sind die Koordinaten eines Planeten in der x-y- Ebene als Funktion der Zeit: x = x(t), y = y(t). Die Bewegungsgleichungen lauten (mit der Abkürzung $r = \sqrt{x^2 + y^2}$):

$$\ddot{x} = \frac{x}{r^3}$$
$$\ddot{y} = \frac{y}{r^3}$$

(a) Führen sie Hilfsvariable ein und formen Sie diese Aufgabe auf ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung um.

(b) Was versteht man unter der Ordnung einer Differentialgleichung, und was unter der Ordnung eines Einschritt-Verfahrens zur numerischen Lösung derselben?

(c) Was versteht man unter dem lokalen, und was unter dem globalen Diskretisierungsfehler?

8. Aufgabe

Die Funktion

$$\phi(x) = \frac{18 - 30\,x + 23\,x^2 - 4\,x^3}{9}$$

hat Fixpunkte für $x = 3/4\,,\ 2$ und 3.

(a) Untersuchen Sie jeweils für die Fixpunkte: Konvergiert die Fixpunkt-Iteration

$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$$

lokal, und wenn ja, mit welcher Konvergenzordnung?

(b) In welchem Zusammenhang stehen Fehler und Konvergenzordnung bei einer Fixpunkt-Iteration?

(c) Finden Sie einen Näherungswert ($\approx$dreistellige Genauigkeit) für die Nullstelle von ϕ mit der Sekantenmethode. Wählen Sie $x^{(0)} = 5$ und $x^{(1)} = 4$ als Startwerte.

(d) Angenommen, Sie wollen durch Intervallhalbierung eine Nullstelle mit circa dreistelliger Genauigkeit finden. Sie beginnen mit dem Anfangsintervall $[4, 5]$. Wie viele Schritte brauchen Sie (Begründung)?

9. Aufgabe

(a) Überprüfen Sie für die 3×3-Matrix A und Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$,

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 11 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

ob es sich um Eigenvektoren handelt und, falls ja, geben Sie zugehörige Eigenwerte an.

(b) Für die Matrix A ist die QR-Zerlegung und eine rechte Seite $\mathbf{b}$ gegeben.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

Lösen Sie damit das Gleichungssystem $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$

10. Aufgabe

Gegeben ist die Funktion $f : y = \frac{1}{1+x^2}$ für $-4 \le x \le 4$.

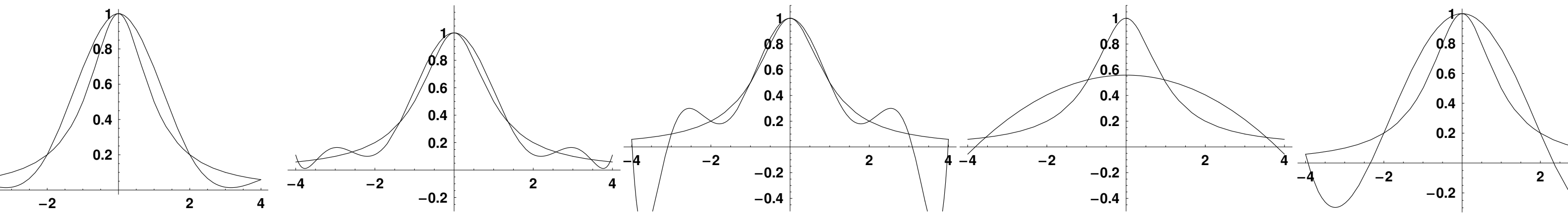
(a) Berechnen Sie näherungsweise $\int_0^4 f(x)dx$ mit der Trapez- und der Simpson-Regel.

(b) Geben Sie das quadratische Interpolationspolynom (nach Newton, oder nach Lagrange) durch die drei Punkte mit $x = -2; 0; 2$ an. Sie müssen das Polynom nicht auf die Standard-Darstellung $a_2x^2 + a_1x + a_0$ umrechnen.

(c) Die Abbildungen zeigen jeweils f und verschiedene Näherungen. Ordnen Sie die entsprechenden Beschreibungen zu!

☐	Interpolationspolynom durch 5 äquidistante Stützstellen
☐	Interpolationspolynom durch 9 äquidistante Stützstellen
☐	Interpolationspolynom durch 9 Tschebyschow-Stützstellen
☐	Kubischer Spline, 4 Teilintervalle
☐	Quadratisches Ausgleichspolynom

.) (B) (C) (D) (E)



11. Aufgabe

Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung dritter Ordnung

$$y'' = xy + 3yy' - y'''.$$

Für $x = 0$ gelten die Anfangsbedingungen $y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 0$.

(a) Führen sie neue Unbekannte $z_1 = y, z_2 = y', z_3 = y''$ ein und formen Sie diese Aufgabe auf ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung mit entsprechenden Anfangsbedingungen um.

(b) Welchen Näherungswert für $y(1)$ liefert das einfache Eulersche Polygonzugverfahren mit Schrittweite $h = 1$?

(c) Das einfache Eulersche Polygonzugverfahren liefert nach 50 Schritten mit Schrittweite $h = 0,02$ die Näherungslösung $y(1) \approx 4,54032$. Der (auf fünf Nachkommastellen) exakte Wert beträgt $y(1) = 4,74801$. Schätzen Sie ab, für welche Schrittweite dieses Verfahren den Wert $y(1)$ auf drei Nachkommastellen korrekt liefern wird.

(d) Das modifizierte Eulerverfahren liefert bei Schrittweite $h = 0,02$ die Näherungslösung $y_h(1) = 4,74356$. Welche Genauigkeit erwarten Sie für die Schrittweite $h = 0,001$?