Gewöhnliche Differentialgleichungen

9. Vorlesung

170 004 Numerische Methoden I

Clemens Brand und Erika Hausenblas

Montanuniversität Leoben

11. April 2019

Gliederung 9. Vorlesung

Definition der Aufgabenstellung

Explizite gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung mit Anfangsbedingung

Gesucht ist eine Funktion $y(x)$.

Sie soll erfüllen

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y(x)) && \text{Differentialgleichung} \\ y(x_0) &= y_0 && \text{Anfangsbedingung} \end{aligned}$$

Wenn f in x stetig ist und einer Lipschitzbedingung genügt, dann existiert eine eindeutige Lösung in der Umgebung des Anfangspunktes x_0.

Was ist eine Differentialgleichung ?

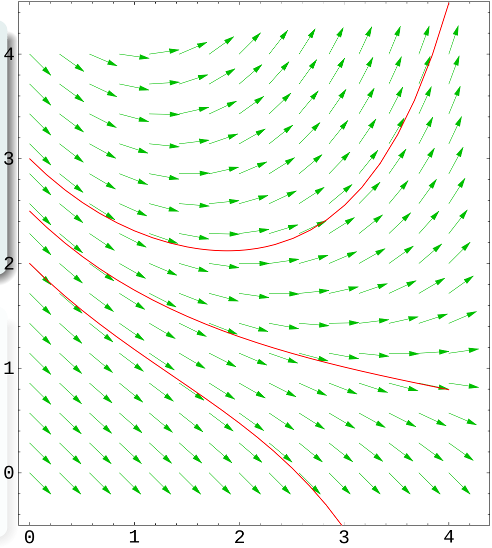
Geometrisch-anschaulich interpretiertes Beispiel

Die Differentialgleichung

$$y' = xy/4 - 1$$

definiert ein *Richtungsfeld* – Zu jedem Punkt (x, y) gibt sie die Steigung (Richtung) der Lösung

Lösungskurven folgen in jedem Punkt der dort gegebenen Richtung – Drei Lösungen zu verschiedenen Anfangsbedingungen sind eingetragen



Was ist eine Differentialgleichung ?

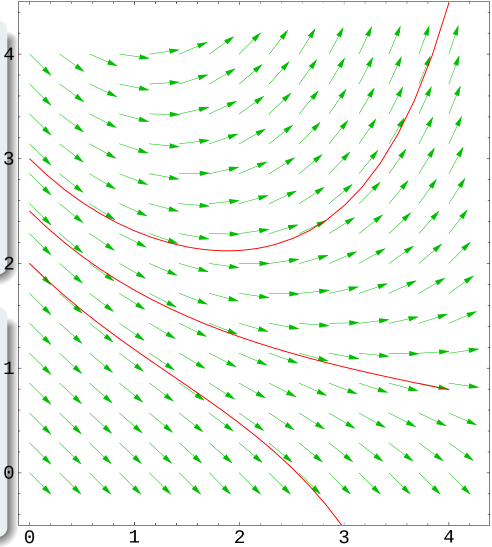
Geometrisch-anschaulich interpretiertes Beispiel

Die Differentialgleichung

$$y' = xy/4 - 1$$

definiert ein *Richtungsfeld* – Zu jedem Punkt (x, y) gibt sie die Steigung (Richtung) der Lösung

Lösungskurven folgen in jedem Punkt der dort gegebenen Richtung – Drei Lösungen zu verschiedenen Anfangsbedingungen sind eingetragen



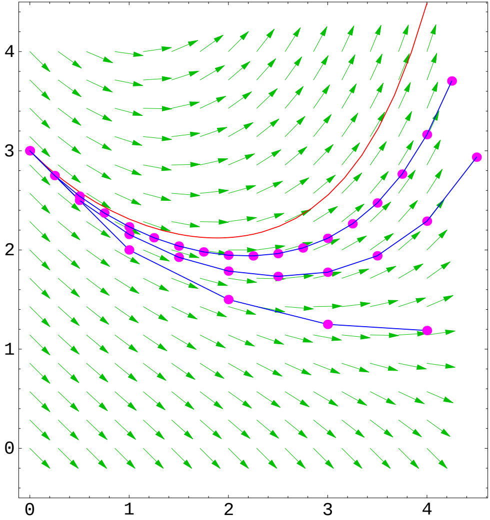
Gliederung 9. Vorlesung

Numerische Approximation – Eulersches Polygonzugverfahren

Für die Differentialgleichung und Anfangsbedingung

$$\begin{aligned} y'(x) &= xy(x)/4 - 1 \\ y(0) &= 3 \end{aligned}$$

sind die exakte Lösung sowie drei Näherungen mit Schrittweiten $h = 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}$ eingetragen.



Einschrittverfahren: Ablaufschema

1. Wähle Schrittweite h und Schrittzahl N;
2. setze x_0 und y_0 laut Anfangsbedingung;
3. berechne für $i = 0, 1, \dots, N-1$

$$x_{i+1} = x_i + h \; ;$$
$$y_{i+1} = y_i + hF(x_i, y_i, h) \; .$$

Die Einschrittverfahren unterscheiden sich in der Wahl der *Verfahrensfunktion F* – sie bestimmt die Fortschreit-Richtung

- explizites Euler-Verfahren: $F(x, y(x), h) = f(x, y(x))$,
- implizites Euler-Verfahren: $F(x, y(x), h) = f(x+h, y(x+h))$,
- Modifiziertes Euler-Verfahren: $F(x, y(x), h) = f\left(x + \frac{h}{2}, y(x) + \frac{h}{2} f(x, y(x))\right)$

Gliederung 9. Vorlesung

1. Aufgabenstellung und Interpretation
2. Numerische Approximation
   - Explizite Einschrittverfahren
3. Implizite Verfahren
4. Stabilität
   - Prüfungsaufgaben zur Stabilitätsgebiet
5. Steife Differentialgleichungen
   - Was ist eine steife Differentialgleichung?
6. Do und Don'ts bei numerischen Verfahren
7. Fehlerordnung und Genauigkeit
   - Zusammenhang Schrittweite – Diskretisierungsfehler
8. Fehlerkontrolle in Matlab
   - Prüfungsaufgabe: Fehlerordnung

Explizite und implizite Einschrittverfahren

Explizit

$$y(x+h) = y(x) + hF(x, y(x), h)$$

links gesuchte Größe, rechts nur bekannte Terme

Implizit

$$y(x+h) = y(x) + hF(x, y(x),\ y(x+h),\ h)$$

gesuchte Größe $y(x+h)$ tritt auf beiden Seiten der Gleichung auf

Explizite Einschrittverfahren sind für gewisse Problemtypen – *steife Differentialgleichungen* – schlecht geeignet.
Implizite Einschrittverfahren sind rechenaufwändiger, zeigen aber höhere *Stabilität*.

Explizite und implizite Einschrittverfahren

Explizit

$$y(x+h) = y(x) + hF(x, y(x), h)$$

links gesuchte Größe, rechts nur bekannte Terme

Implizit

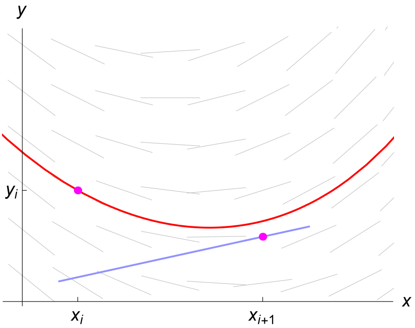
$$y(x+h) = y(x) + hF(x, y(x),\ y(x+h),\ h)$$

gesuchte Größe $y(x+h)$ tritt auf beiden Seiten der Gleichung auf

Explizite Einschrittverfahren sind für gewisse Problemtypen – *steife Differentialgleichungen* – schlecht geeignet.
Implizite Einschrittverfahren sind rechenaufwändiger, zeigen aber höhere *Stabilität*.

Implizites Eulerverfahren: $F(x, y(x), h) = f(x + h, y(x + h))$

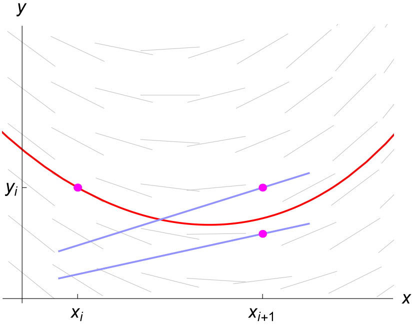
- berechne Steigungen im Endpunkt $x_{i+1} = x + h$
- suche die Steigung, die Startpunkt (x_i, y_i) trifft
- löse dazu eine Gleichung für y_{i+1}



$F \neq D$, ähnlich daneben wie beim expliziten Euler-Verfahren, aber bei *steifen Differentialgleichungen* stabiler.

Implizites Eulerverfahren: $F(x, y(x), h) = f(x+h, y(x+h))$

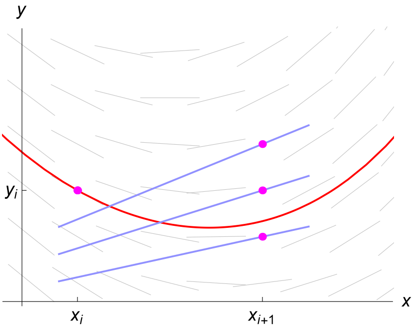
- berechne Steigungen im Endpunkt $x_{i+1} = x + h$
- suche die Steigung, die Startpunkt (x_i, y_i) trifft
- löse dazu eine Gleichung für y_{i+1}



$F \neq D$, ähnlich daneben wie beim expliziten Euler-Verfahren, aber bei *steifen Differentialgleichungen* stabiler.

Implizites Eulerverfahren: $F(x, y(x), h) = f(x+h, y(x+h))$

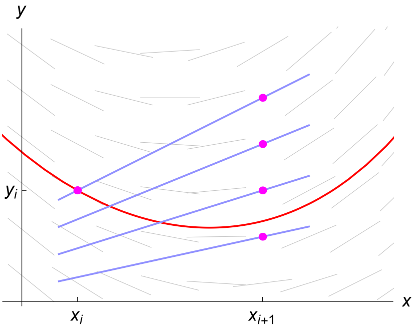
- berechne Steigungen im Endpunkt $x_{i+1} = x + h$
- suche die Steigung, die Startpunkt (x_i, y_i) trifft
- löse dazu eine Gleichung für y_{i+1}



$F \neq D$, ähnlich daneben wie beim expliziten Euler-Verfahren, aber bei *steifen Differentialgleichungen* stabiler.

Implizites Eulerverfahren: $F(x, y(x), h) = f(x + h, y(x + h))$

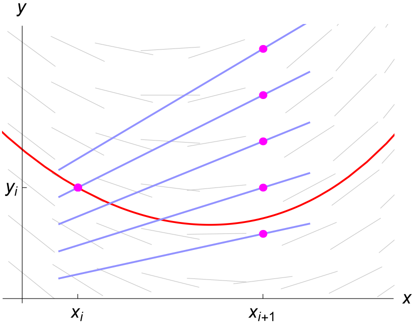
- berechne Steigungen im Endpunkt $x_{i+1} = x + h$
- suche die Steigung, die Startpunkt (x_i, y_i) trifft
- löse dazu eine Gleichung für y_{i+1}



$F \neq D$, ähnlich daneben wie beim expliziten Euler-Verfahren, aber bei *steifen Differentialgleichungen* stabiler.

Implizites Eulerverfahren: $F(x, y(x), h) = f(x + h, y(x + h))$

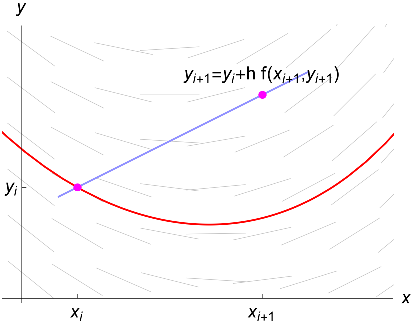
- berechne Steigungen im Endpunkt $x_{i+1} = x + h$
- suche die Steigung, die Startpunkt (x_i, y_i) trifft
- löse dazu eine Gleichung für y_{i+1}



$F \neq D$, ähnlich daneben wie beim expliziten Euler-Verfahren, aber bei *steifen Differentialgleichungen* stabiler.

Implizites Eulerverfahren: $F(x, y(x), h) = f(x+h, y(x+h))$

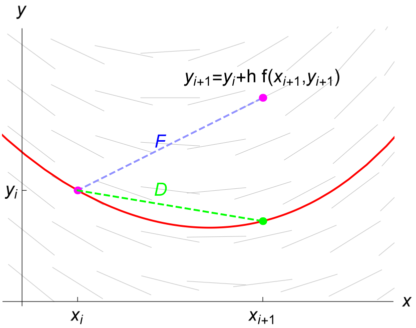
- berechne Steigungen im Endpunkt $x_{i+1} = x + h$
- suche die Steigung, die Startpunkt (x_i, y_i) trifft
- löse dazu eine Gleichung für y_{i+1}



$F \neq D$, ähnlich daneben wie beim expliziten Euler-Verfahren, aber bei *steifen Differentialgleichungen* stabiler.

Implizites Eulerverfahren: $F(x, y(x), h) = f(x+h, y(x+h))$

- berechne Steigungen im Endpunkt $x_{i+1} = x + h$
- suche die Steigung, die Startpunkt (x_i, y_i) trifft
- löse dazu eine Gleichung für y_{i+1}



$F \neq D$, ähnlich daneben wie beim expliziten Euler-Verfahren, aber bei *steifen Differentialgleichungen* stabiler.

Prüfungsaufgabe: implizites Euler-Verfahren

Gegeben ist für $y = y(x)$ die Differentialgleichung mit Anfangsbedingung

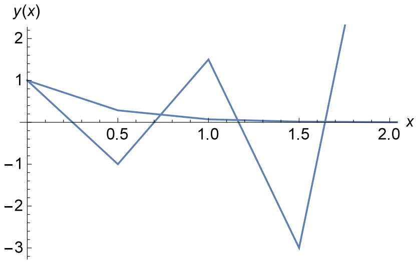
$$y'(x) = -2y(x)\,(2+x) \qquad y(0) = 1$$

(a) Berechnen Sie mit $h = \frac{1}{2}$ drei Schritte des expliziten Euler-Verfahrens.

(b) Das *implizite* Euler-Verfahren verwendet für eine Differentialgleichung der Form $y'(x) = f(x, y)$ den Rechenschritt

$$y_{i+1} = y_i + h\,f(x_{i+1}, y_{i+1})\ .$$

Berechnen Sie drei Schritte mit diesem Verfahren. Explizites und implizites Euler-Verfahrens sind nebenstehend grafisch dargestellt. Erklären Sie das unterschiedliche Verhalten.



Gliederung 9. Vorlesung

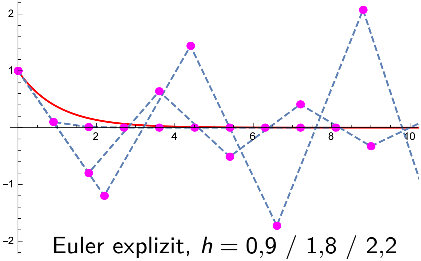
Stabilität

Problem: Numerische Lösung divergiert bei zu großen Schrittweiten

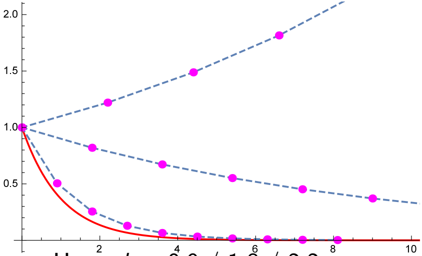
Gegeben: Anfangswertproblem für $y(x)$

$$\begin{aligned} y'(x) &= -y(x) \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

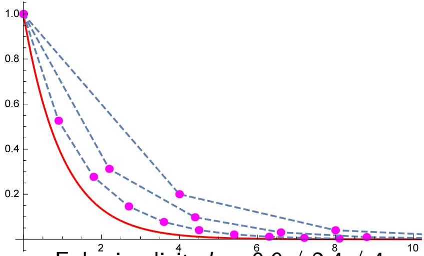
Mit wachsendem x divergieren das explizite Euler- und das Heun-Verfahren bei Schrittweiten $h > 2$. Das implizite Eulerverfahren berechnet – unabhängig von h – korrekt $y(x) \to 0$ für $x \to \infty$.



Euler explizit, $h = 0{,}9 \;/\; 1{,}8 \;/\; 2{,}2$



Heun, $h = 0{,}9 \;/\; 1{,}8 \;/\; 2{,}2$



Euler implizit, $h = 0{,}9 \;/\; 2{,}4 \;/\; 4$

Stabilität

Ein Verfahren heißt *stabil* bei Schrittweite h, wenn für das Modellproblem

$$y'(x) = -y(x) \qquad y(0) = 1$$

die numerische Lösung mit wachsendem x nach Null konvergiert.

- Es gibt verschiedene Definitionen für Stabilität eines numerischen Verfahrens.
- Allgemein kann man sich merken: Implizite Verfahren – immer stabil, expliziten Verfahren – nur bei kleinen Schrittweiten stabil.
- Stabilitätsprobleme treten vor allem bei *steifen Differentialgleichungen* auf. Für solche Probleme sind implizite Verfahren besser geeignet.

Stabilitätsgebiet

eine Definition für allgemeinere Modellprobleme

Diese Stabilitäts-Definition verwendet die Testgleichung

$$y'(x) = \lambda y(x), \qquad y(0) = 1$$

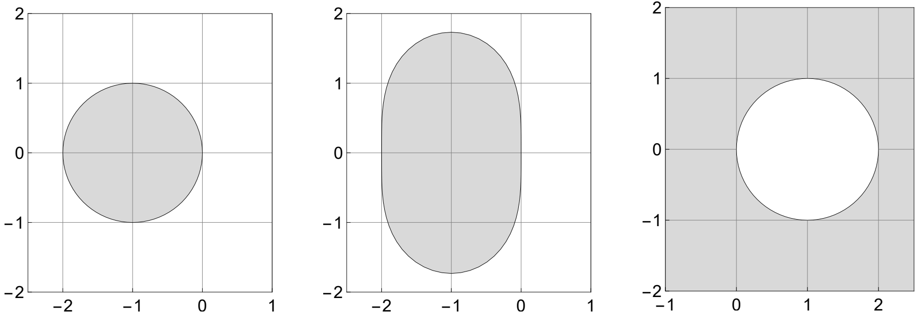
Sie untersucht dabei $\lambda \in \mathbb{C}$.

Stabilitätsgebiet eines Verfahrens

Die Menge aller $\lambda \in \mathbb{C}$, für die das numerische Verfahren mit fixer Schrittweite $h = 1$ bei obiger Testgleichung eine nach Null konvergierende Folge von Näherungswerten liefert.

Stabilitätsgebiet

Die Stabilitätsgebiete dreier Verfahren sind hier als graue Regionen in der komplexen Ebene dargestellt. Von links nach rechts: explizites Euler-Verfahren, Heun-Verfahren, implizites Euler-Verfahren



Stabilitätsgebiet

Was bedeutet diese Definition - warum auch komplexe λ?

Stabilität ist vor allem ein Problem bei steifen Systemen. Dabei sind die Eigenwerte λ der Jacobi-Matrix bestimmend: Alle λ müssen im Stabilitätsgebiet liegen.

Beispiel: System

$$\begin{bmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\frac{8}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{bmatrix}$$

Eigenwerte $\lambda_{1,2} = -\frac{4}{5} \pm i\frac{3}{5}$ liegen im Stabilitätsgebiet des expliziten Eulerverfahrens. Numerische Lösung mit Schrittweite $h = 1$ konvergiert.

Andere Schrittweiten

Numerische Lösung mit Schrittweite h ist stabil, wenn λh im Stabilitätsgebiet liegt.

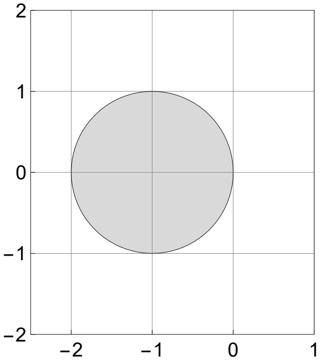
Prüfungsfrage: Stabilitätsgebiet

Die graue Region zeigt das Stabilitätsgebiet des expliziten Eulerverfahrens.
Für welche Gleichungen ist dieses Verfahren bei Schrittweite $h = 1$ numerisch sinnvoll?

$$y'(x) = -y(x)/5$$

$$y'(x) = -5y(x)$$

$$y''(x) + y'(x) + y(x) = 0$$



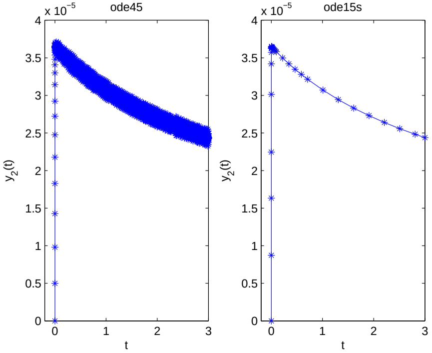
Wann soll man welche Methode verwenden ?

- Robertson ODE

Gegeben ist die Differentialgleichung $y(0) = (1, 0, 0)$ und

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1(t) &= -0.04\, y_1(t) \\
&\quad +10^4 y_2(t)\, y_3(t), \\
\dot{y}_2(t) &= 0.04\, y_1(t) - 10^4 y_2(t)\, y_3(t) \\
&\quad -3 \times 10^7 y_2^2(t), \\
\dot{y}_3(t) &= 3 \times 10^7 y_2^2(t).
\end{aligned}$$

Wie man an den Plot sieht, funktioniert der ode45 schlechter als der ode15s, obwohl der ode45 höhere Ordnung hat !



Wann soll man welche Methode verwenden ?

- Steifheit einer Differenzialgleichung:

Sei

$$\dot{y}(t) = f(y(t)), \quad t \geq 0, \quad y(0) = y_0$$

gegeben.

Sei

$$J_f(z) = \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{y=z}.$$

Dann ist eine mögliche Definition der Steifigkeit

$$S := \frac{\max_j |\lambda_j|}{\min_j |\lambda_j|}$$

wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte der Matrix $J_f(z)$ ist.

Wann soll man welche Methode verwenden ?

- Robertson ODE

$$J_f(z)\Big|_{z=y} = \begin{pmatrix} y_1 & 10^4\, y_3 & 10^4 y_2 \\ 0.04 & -10^4\, y_3 - 6 \times 10^7 y_2 & -10^4 y_2 - 6 \times 10^7 y_2 \\ 0 & 6 \times 10^7 y_2 & 0 \end{pmatrix}$$

an der Stelle $(1, 0.1, 0.1)$ erhält man als Eigenwerte -6, 0.001, 0.00001.

Wann soll man welche Methode verwenden ?

- Robertson ODE

$$J_f(z)\Big|_{z=y} = \begin{pmatrix} y_1 & 10^4\, y_3 & 10^4 y_2 \\ 0.04 & -10^4\, y_3 - 6\times 10^7 y_2 & -10^4 y_2 - 6\times 10^7 y_2 \\ 0 & 6\times 10^7 y_2 & 0 \end{pmatrix}$$

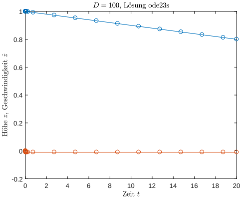
an der Stelle $(1, 0.1, 0.1)$ erhält man als Eigenwerte -6, 0.001, 0.00001.

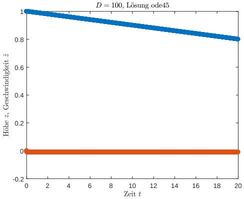
Gliederung 9. Vorlesung

Steife Differentialgleichungen

Bei *steifen* Differentialgleichungen brauchen explizite Einschrittverfahren unvernünftig kleine Schrittweiten, obwohl sich die Lösung pro Schritt nahezu gar nicht ändert.

Beispiel: Freier Fall durch viskoses Medium (Löffel versinkt im Honig)
Bewegungsgleichung für Höhe $z(t)$: $\qquad \ddot{z} + D\dot{z} + 1 = 0 \quad$ mit $D \gg 1$
Nach kurzer Zeit $t \approx 1/D$ nahezu konstante Sinkgeschwindigkeit. Ab dann verläuft $z(t)$ unspektakulär linear.





`ode23s`: 31 Rechenpunkte

`ode45` 2441 Rechenpunkte

Steifes Anfangswertproblem

Gegeben: DG-System mit Anfangsbedingung für $\mathbf{y}(x), \quad x \geq 0$

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$$

Sei D_f die Jacobi-Matrix von $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$, (mit part. Ableitungen nach $\mathbf{y}$!)

$$D_f = \left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right]$$

(D_f hängt im Allgemeinen von x und den Werten der Lösung $\mathbf{y}$ ab!)
Angenommen, für alle Eigenwerte λ von D_f sind die Realteile $Re(\lambda) < 0$.

Das Steifheits-Verhältnis S ist dann definiert als

$$S = \frac{Re(\lambda_{\max})}{Re(\lambda_{\min})}$$

Je größer S, desto steifer das Problem.

wobei $\lambda_{\max}$ und $\lambda_{\min}$ die Eigenwerte mit maximalem bzw. minimalen Realteil-Betrag sind.

Steifes Anfangswertproblem

Warum ist S so kompliziert definiert?

- Eigenwerte mit negativem Realteil beschreiben *exponentiell abklingende Komponenten* der Lösung $\approx e^{-\lambda x}$.
- Betragsmäßig *großer/kleiner* negativer Realteil $\rightarrow$ *rasch/langsam* abklingende Lösungs-Komponente.
- Oft laufen Teilprozesse mit sehr unterschiedlichen Geschwindigkeiten (sehr unterschiedlich schnell abklingenden Komponenten) ab.
- Explizite Verfahren müssen ihre Schrittweite an den schnellsten Teilprozess anpassen, *auch wenn dieser schon längst abgeklungen ist*.
- Implizite Verfahren passen die Schrittweite der tatsächlichen Änderungsrate an.

Ein einfaches steifes System

Gegeben: Anfangswertproblem für $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x), \quad 0 \le x \le 3$

$$\begin{array}{rcrr} y_1' & = & -1999y_1 & -1998y_2 \\ y_2' & = & 999y_1 & +998y_2 \end{array} \text{, Anfangsbedingungen } \begin{array}{rr} y_1(0) & = 1 \\ y_2(0) & = -1 \end{array} .$$

- Die Jacobi-Matrix ist in diesem Fall

$$D_f = \begin{bmatrix} -1999 & -1998 \\ 999 & 998 \end{bmatrix}$$

- Ihre Eigenwerte sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = -1000$.
- moderat hohe Steifigkeit

$$S = \frac{1000}{1}$$

Ein einfaches steifes System (2)

Gegeben: Anfangswertproblem für $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x), \quad 0 \le x \le 3$

$$\begin{array}{rcrr} y_1' & = & -1999y_1 & -1998y_2 \\ y_2' & = & 999y_1 & +998y_2 \end{array}, \text{ Anfangsbedingungen } \begin{array}{rr} y_1(0) & = 1 \\ y_2(0) & = -1 \end{array}.$$

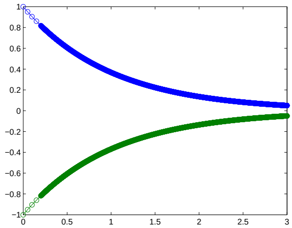
- Lösung zu den gegebenen Anfangsbedingungen: $y_1 = e^{-x}; y_2 = -e^{-x}$.
- Allgemeine Lösung enthält auch *Terme mit e^{-1000x}*
- Obwohl die e^{-1000x}-Terme sehr rasch abklingen (oder, so wie hier, in der Lösung gar nicht vorkommen), bereiten sie expliziten Verfahren große Schwierigkeiten.

Ein einfaches steifes System (3)

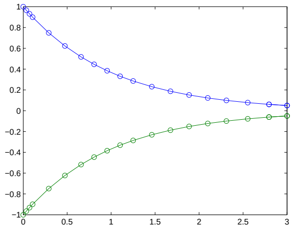
Gegeben: Anfangswertproblem für $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x), \quad 0 \leq x \leq 3$

$$\begin{array}{rcrr} y_1' & = & -1999y_1 & -1998y_2 \\ y_2' & = & 999y_1 & +998y_2 \end{array}, \text{ Anfangsbedingungen } \begin{array}{rr} y_1(0) & = 1 \\ y_2(0) & = -1 \end{array}.$$

`ode45`: extrem kleine Schrittweite
$\approx$ 3400 Datenpunkte



`ode15s`: große Schrittweite
19 Datenpunkte



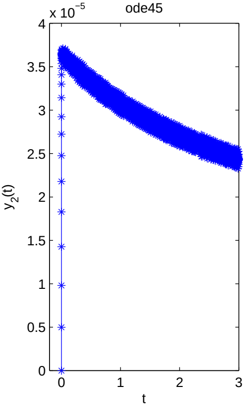
Noch ein steifes Problem

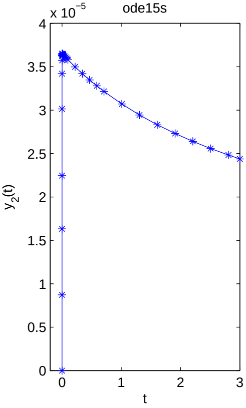
MATLABs Standard-Löser `ode45` im Vergleich zu `ode15s`

Die *Robertson-Differentialgleichung*, ein oft verwendetes Testproblem, beschreibt die Kinetik einer autokatalytischen chemischen Reaktion.
Gegeben: DG-System für $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ mit $y(0) = (1, 0, 0)$

$$
\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= -0.04\, y_1 + 10^4 y_2\, y_3, \\
\dot{y}_2 &= 0.04\, y_1 - 10^4 y_2\, y_3 - 3 \cdot 10^7 y_2^2, \\
\dot{y}_3 &= 3 \cdot 10^7 y_2^2.
\end{aligned}
$$

- Zuerst extrem rascher Anstieg, dann langsamer Abfall von y_2.
- Extrem großer Unterschied zwischen den einzelnen Reaktionsraten→*steifes System*.
- `ode45` hat höhere Ordnung, aber `ode15s` rechnet genauer und schneller.





Die Robertson-Differentialgleichung

Das Testproblem von vorhin

Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -0.04\, y_1 + 10^4 y_2\, y_3, \\ \dot{y}_2 &= 0.04\, y_1 - 10^4 y_2\, y_3 - 3 \cdot 10^7 y_2^2, \\ \dot{y}_3 &= 3 \cdot 10^7 y_2^2. \end{aligned}$$

Jacobi-Matrix

$$D_f = \begin{bmatrix} -0{,}04 & 10^4\, y_3 & 10^4 y_2 \\ 0{,}04 & -10^4\, y_3 - 6 \cdot 10^7 y_2 & -10^4 y_2 \\ 0 & 6 \cdot 10^7 y_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Eigenwerte für $\mathbf{y} = [1; \quad 0{,}1; \quad 0{,}1]$ sind

$$\lambda_1 = -6 \cdot 10^6; \quad \lambda_2 = -10^3; \quad \lambda_3 = 1 \cdot 10^{-14}$$

Steifigkeit daher $S = 6 \cdot 10^{20}$!

Prüfungsaufgabe: Steifigkeit

Gegeben ist für $y_1 = y_1(x)$ und $y_2 = y_2(x)$ das System von Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= -1011 y_1(x) + 1005 y_2(x) \\ y_2'(x) &= \quad 1005 y_1(x) - 1011 y_2(x). \end{aligned}$$

1. Geben Sie ein Maß für die Steifigkeit dieses Systems an.
2. Wie groß darf die Schrittweite h eines expliziten Eulerverfahrens für eine sinnvolle Näherungslösung dieser Aufgabe höchstens sein?

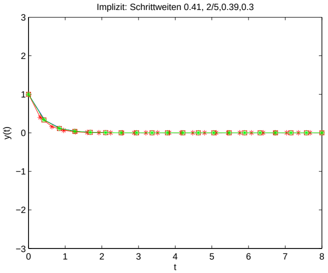
Gliederung 9. Vorlesung

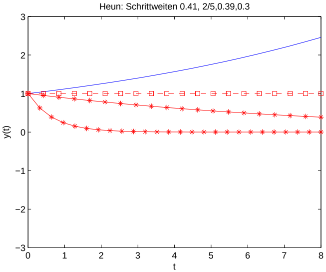
Wann soll man welche Methode verwenden ?

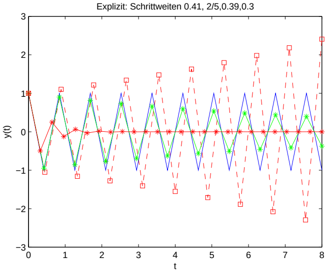
Gegeben: Anfangswertproblem für $y = y(x)$

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= -5y(x) \\
y(0) &= 3
\end{aligned}
$$

Mit wachsendem x divergieren das explizite Euler- und das Heun-Verfahren bei Schrittweiten $h > 0{,}4$. Das implizite Eulerverfahren berechnet – unabhängig von h – korrekt $y(x) \to 0$ für $x \to \infty$.







Gliederung 9. Vorlesung

Fehlerordnung p und Genauigkeit

Zusammenhang Schrittweite h — globale rDiskretisierungsfehler ϵ

Schrittweite und Fehler

stehen bei Fehlerordnung p im Verhältnis

$$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \approx \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^p$$

Hohes p — hohe Genauigkeit für $h \to 0$

Warnung!

Das gilt nur für *glatte* (=genügend oft differenzierbare) Funktionen

Enthält die Differentialgleichung nicht (oder nicht ausreichend oft) differenzierbare Terme, dann nützt hohes p gar nichts!

Fehlerordnung p und Genauigkeit

Zusammenhang Schrittweite h — globale rDiskretisierungsfehler ϵ

Schrittweite und Fehler

stehen bei Fehlerordnung p im Verhältnis

$$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \approx \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^p$$

Hohes p — hohe Genauigkeit für $h \to 0$

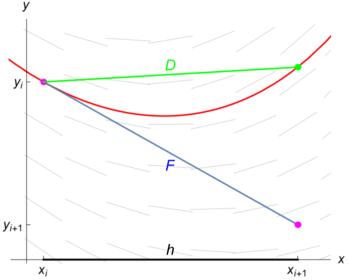
Warnung!

Das gilt nur für *glatte* (=genügend oft differenzierbare) Funktionen

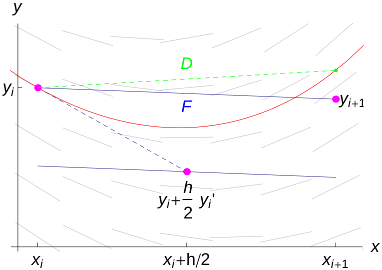
Enthält die Differentialgleichung nicht (oder nicht ausreichend oft) differenzierbare Terme, dann nützt hohes p gar nichts!

Lokaler Diskretisierungsfehler für $y' = f(x, y)$

Einfaches Euler-Verfahren, $p = 1$



Modifiziertes Euler-Verfahren, $p = 2$



$$D - F = \frac{h}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right) + O(h^2)$$

$$D - F = \frac{h^2}{24}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \cdots + f^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) + O(h^3)$$

Taylorreihenentwicklung liefert Ausdrücke für $D - F$.
Darin treten *höhere Ableitungen* von f auf.

Hohe Ordnung schlecht bei rauhem f!

Beim klassischen Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung liefert die Taylorreihenentwicklung für den lokalen Diskretisierungsfehler

$$D - F = \frac{h^4}{2880}\left(-\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} - 4f\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} - 6f^2\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \dots\right) + O(h^5)$$

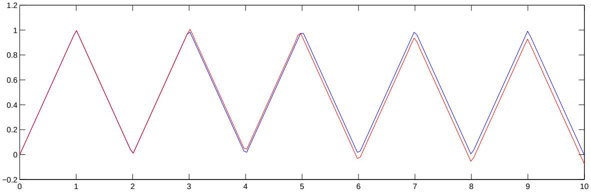
Darin treten partielle Ableitungen von f bis zur vierten Ordnung auf.

- Nur wenn diese Ableitungen existieren, gilt die hohe Fehlerordnung.
- Ist f nicht ausreichend differenzierbar, verwenden Sie lieber gleich ein Verfahren mit niedriger Ordnung.
- MATLABs Schrittweiten-Steuerung verlässt sich auf die Gültigkeit der Fehlerformeln, nicht ausreichend glattes f ruiniert die Schrittweitensteuerung.

Beispiele: $y'(x) = f(x, y)$ für nicht glatte f

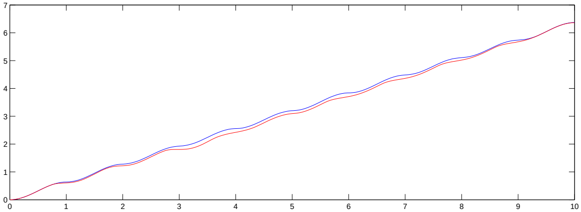
f ist Rechtecksfunktion $f(x, y) = \operatorname{sign}(\sin(\pi x))$

Lösung $y(x)$



f ist Sinus-Halbwelle $f(x, y) = |\sin(\pi x)|$

Lösung $y(x)$



Die Lösungen von `ode15s` und `ode45` driften sichtlich auseinander.

Gliederung 9. Vorlesung

Fehlerkontrolle, Schrittweitensteuerung in Matlab

Eine Schätzung des tatsächlichen Fehlers ϵ_1 (absolut oder relativ) bei Schrittweite h_1 sei bekannt. Schrittweite und Fehler stehen bei Fehlerordnung p im Verhältnis

$$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^p$$

Um eine gewünschte Fehlerschranke ϵ_2 zu erreichen: Ändere Schrittweite gemäš

$$h_2 = h_1 \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^{\frac{1}{p}}$$

Steuerung in Matlab: Schranken für relativen und absoluten Fehler

```
options=odeset('RelTol',1.e-7,'AbsTol',1.e-10)
```

Prüfungsaufgabe

Für die Differentialgleichung $y'(x) = -\sin x$ mit Anfangsbedingung $y(0) = 1$ lautet die exakte Lösung $y(30) = \cos(30) = 0{,}154251$.
Mit Schrittweite $h = 1/2$ berechnen

	$y(30) =$
Das einfache Euler-Verfahren	$-0{,}0750628$
Das modifizierte Euler-Verfahren	$0{,}145377$
Das RK Verfahren 4. Ordnung	$0{,}154233$

Wie groß ist jeweils der globalen Diskretisierungsfehler?
Welche Schrittweite müssten Sie jeweils verwenden, wenn Sie $y(30)$ mit einem absoluten Fehler $< 10^{-6}$ berechnen wollen?

Die Differentialgleichung lautet nun $y'(x) = |\sin(10x)|$, gleiche Anfangsbedingung, gleiche Schrittweite. Exakte Lösung $y(30) = 20{,}09779034$.
Die numerischen Ergebnisse der drei Verfahren sind 19,8599 ; 20,1030 ; 20,1053.
Was können Sie hier zum Zusammenhang Ordnung–Schrittweite–Genauigkeit sagen?

Prüfungsaufgabe

Für die Differentialgleichung $y'(x) = -\sin x$ mit Anfangsbedingung $y(0) = 1$ lautet die exakte Lösung $y(30) = \cos(30) = 0{,}154251$.
Mit Schrittweite $h = 1/2$ berechnen

	$y(30) =$
Das einfache Euler-Verfahren	$-0{,}0750628$
Das modifizierte Euler-Verfahren	$0{,}145377$
Das RK Verfahren 4. Ordnung	$0{,}154233$

Wie groß ist jeweils der globalen Diskretisierungsfehler?
Welche Schrittweite müssten Sie jeweils verwenden, wenn Sie $y(30)$ mit einem absoluten Fehler $< 10^{-6}$ berechnen wollen?

Die Differentialgleichung lautet nun $y'(x) = |\sin(10x)|$, gleiche Anfangsbedingung, gleiche Schrittweite. Exakte Lösung $y(30) = 20{,}09779034$.
Die numerischen Ergebnisse der drei Verfahren sind 19,8599 ; 20,1030 ; 20,1053.
Was können Sie hier zum Zusammenhang Ordnung–Schrittweite–Genauigkeit sagen?