Gewöhnliche Differentialgleichungen

8. Vorlesung
170 004 Numerische Methoden I

Clemens Brand und Erika Hausenblas

Montanuniversität Leoben

16. April 2020

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Gliederung 8. Vorlesung

Definition der Aufgabenstellung

Explizite gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung mit Anfangsbedingung

Gesucht ist eine Funktion $y(x)$.

Sie soll erfüllen

$y'(x) = f(x, y(x))$	Differentialgleichung
$y(x_0) = y_0$	Anfangsbedingung

Dabei ist f mit Definitionsmenge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ gegeben: $(x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$. Schlagen Sie in ihren Unterlagen nach: Wenn f in x stetig ist und in y einer Lipschitzbedingung genügt, dann existiert eine eindeutige Lösung in der Umgebung des Anfangspunktes x_0.

Definition der Aufgabenstellung

Explizite gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung mit Anfangsbedingung

Gesucht ist eine Funktion $y(x)$.

Sie soll erfüllen

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= f(x, y(x)) && \text{Differentialgleichung} \\
y(x_0) &= y_0 && \text{Anfangsbedingung}
\end{aligned}
$$

Dabei ist f mit Definitionsmenge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ gegeben: $(x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$. Schlagen Sie in ihren Unterlagen nach: Wenn f in x stetig ist und in y einer Lipschitzbedingung genügt, dann existiert eine eindeutige Lösung in der Umgebung des Anfangspunktes x_0.

Ein paar Beispiele zum Verständnis der Aufgabenstellung

Wie lautet die Differentialgleichung, welche Lösungen kennen Sie?

1. Ganz leicht:
$$f(x, y) = x$$
2. Leicht:
$$f(x, y) = y$$
3. Mittel:
$$f(x, y) = \frac{1}{4}xy - 1$$
Kommt als Beispiel in den nächsten Folien
4. Schwer?
$$f(x, y) = \frac{1}{x + e^y}$$
Lösung ist keine Funktion, die Ihr Taschenrechner kennt.

Siehe MATLAB-Skript `BeispieleGDG`

Ein paar Beispiele zum Verständnis der Aufgabenstellung

Wie lautet die Differentialgleichung, welche Lösungen kennen Sie?

1. Ganz leicht:
$$f(x,y) = x$$
2. Leicht:
$$f(x,y) = y$$
3. Mittel:
$$f(x,y) = \frac{1}{4}xy - 1$$
Kommt als Beispiel in den nächsten Folien
4. Schwer?
$$f(x,y) = \frac{1}{x + e^y}$$
Lösung ist keine Funktion, die Ihr Taschenrechner kennt.

Siehe MATLAB-Skript `BeispieleGDG`

Ein paar Beispiele zum Verständnis der Aufgabenstellung

Wie lautet die Differentialgleichung, welche Lösungen kennen Sie?

1. Ganz leicht:
$$f(x, y) = x$$

2. Leicht:
$$f(x, y) = y$$

3. Mittel:
$$f(x, y) = \frac{1}{4}xy - 1$$
Kommt als Beispiel in den nächsten Folien

4. Schwer?
$$f(x, y) = \frac{1}{x + e^y}$$
Lösung ist keine Funktion, die Ihr Taschenrechner kennt.

Siehe MATLAB-Skript `BeispieleGDG`

Ein paar Beispiele zum Verständnis der Aufgabenstellung

Wie lautet die Differentialgleichung, welche Lösungen kennen Sie?

1. Ganz leicht:
$$f(x, y) = x$$
2. Leicht:
$$f(x, y) = y$$
3. Mittel:
$$f(x, y) = \frac{1}{4}xy - 1$$
Kommt als Beispiel in den nächsten Folien
4. Schwer?
$$f(x, y) = \frac{1}{x + e^y}$$
Lösung ist keine Funktion, die Ihr Taschenrechner kennt.

Siehe MATLAB-Skript `BeispieleGDG`

Was ist eine Differentialgleichung ?

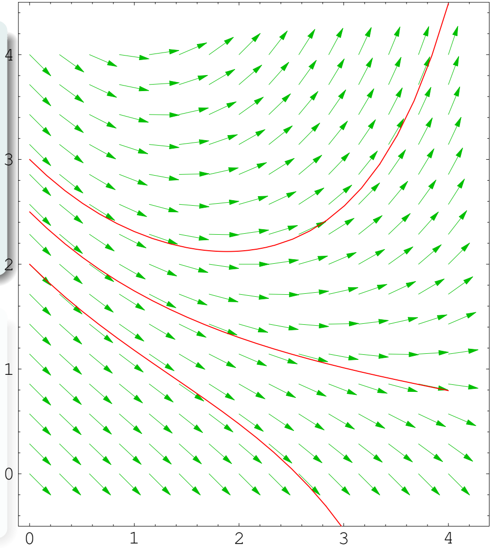
Geometrisch-anschaulich interpretiertes Beispiel

Die Differentialgleichung

$$y' = xy/4 - 1$$

definiert ein *Richtungsfeld* – Zu jedem Punkt (x, y) gibt sie die Steigung (Richtung) der Lösung

Lösungskurven folgen in jedem Punkt der dort gegebenen Richtung – Drei Lösungen zu verschiedenen Anfangsbedingungen sind eingetragen



Was ist eine Differentialgleichung ?

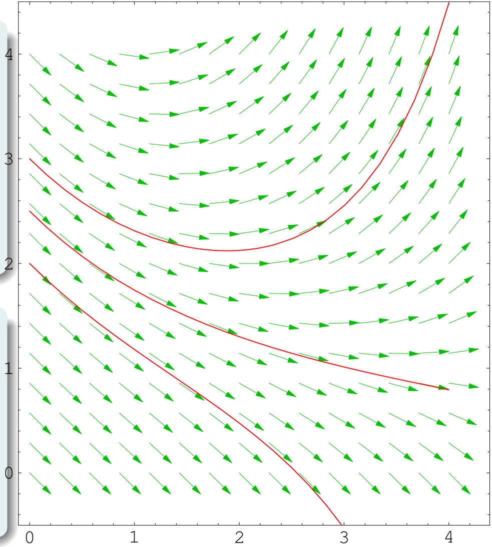
Geometrisch-anschaulich interpretiertes Beispiel

Die Differentialgleichung

$$y' = xy/4 - 1$$

definiert ein *Richtungsfeld* – Zu jedem Punkt (x, y) gibt sie die Steigung (Richtung) der Lösung

Lösungskurven folgen in jedem Punkt der dort gegebenen Richtung – Drei Lösungen zu verschiedenen Anfangsbedingungen sind eingetragen



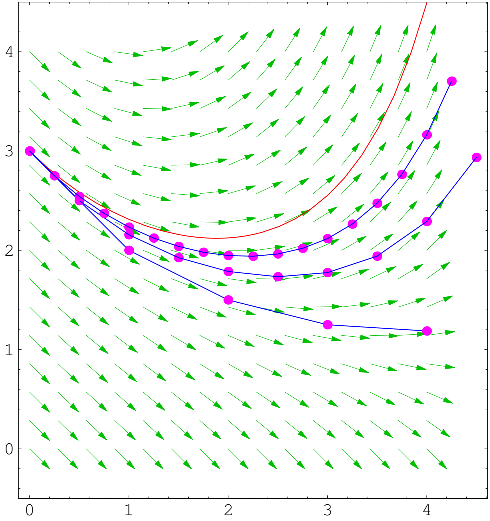
Gliederung 8. Vorlesung

Numerische Approximation – Eulersches Polygonzugverfahren

Für die Differentialgleichung und Anfangsbedingung

$$\begin{aligned} y' &= xy/4 - 1 \\ y(0) &= 3 \end{aligned}$$

sind die exakte Lösung sowie drei Näherungen mit Schrittweiten $h = 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}$ eingetragen.



Aufgabe: Richtungsfeld und Euler-Verfahren

Für die Differentialgleichung

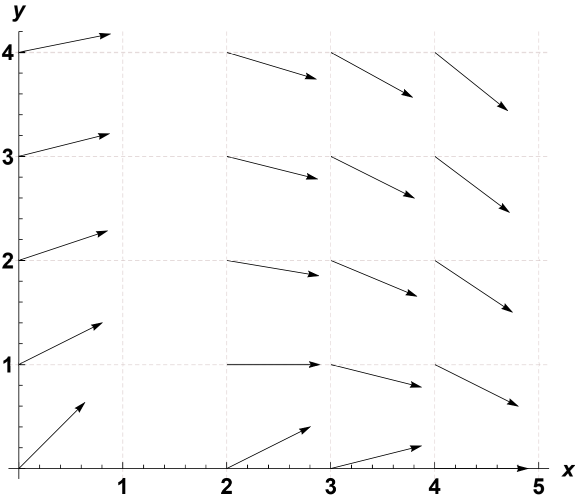
$$y' = \frac{1}{y+1} - \frac{x}{4}$$

zeigt die Abbildung einen Teil des zugehörigen Richtungsfeldes.

Ergänzen Sie das Richtungsfeld an den Punkten $x = 1, y = 0, \ldots, 4$.

Orientieren Sie sich am Richtungsfeld und skizzieren Sie die Lösung zur Anfangsbedingung $y(0) = 2$.

Berechnen Sie mit dem expliziten Euler-Verfahren, Schrittweite $h = 1$, die Näherungslösung zur Anfangsbedingung $y(0) = 2$ für $0 \leq x \leq 3$



Einschrittverfahren: Ablaufschema

1. Wähle Schrittweite h und Schrittzahl N;
2. setze x_0 und y_0 laut Anfangsbedingung;
3. berechne für $i = 0, 1, \dots, N-1$
$$x_{i+1} = x_i + h \; ;$$
$$y_{i+1} = y_i + hF(x_i, y_i, h) \; .$$

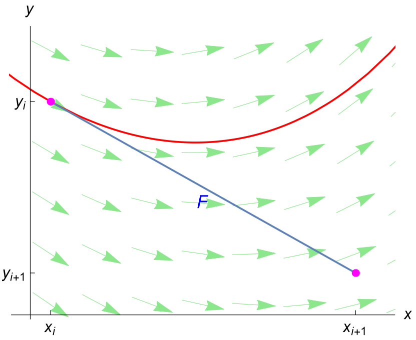
Die Einschrittverfahren unterscheiden sich in der Wahl der *Verfahrensfunktion F* – sie bestimmt die Fortschreit-Richtung

- explizites Euler-Verfahren: $F(x, y(x), h) = f(x, y(x))$,
- implizites Euler-Verfahren: $F(x, y(x), h) = f(x+h, y(x+h))$,
- Modifiziertes Euler-Verfahren:
$F(x, y(x), h) = f\left(x + \frac{h}{2}, y(x) + \frac{h}{2} f(x, y(x))\right)$

Einschrittverfahren: Verfahrensfunktion $F(x, y, h)$

- F berechnet Richtung von Punkt (x_i, y_i) zu Punkt (x_{i+1}, y_{i+1}).
- F entspricht einem *Differenzenquotienten* $\Delta y / \Delta x$
- F ist nicht das $D = \Delta y / \Delta x$ der exakten Lösung

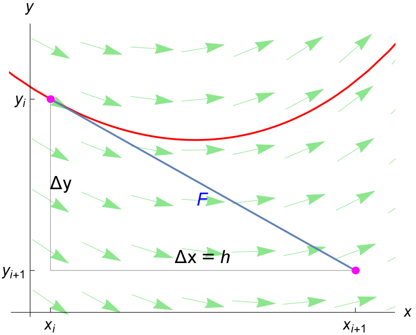
Beim Euler-Verfahren stimmt F mit der Anfangs-Richtung, der Steigung im Startpunkt, überein: $F(x, y, h) = f(x, y)$



Einschrittverfahren: Verfahrensfunktion $F(x, y, h)$

- F berechnet Richtung von Punkt (x_i, y_i) zu Punkt (x_{i+1}, y_{i+1}).
- F entspricht einem *Differenzenquotienten* $\Delta y / \Delta x$
- F ist nicht das $D = \Delta y / \Delta x$ der exakten Lösung

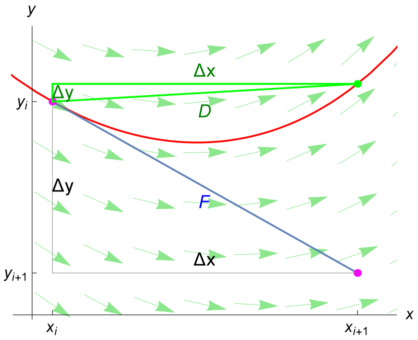
Beim Euler-Verfahren stimmt F mit der Anfangs-Richtung, der Steigung im Startpunkt, überein: $F(x, y, h) = f(x, y)$



Einschrittverfahren: Verfahrensfunktion $F(x, y, h)$

- F berechnet Richtung von Punkt (x_i, y_i) zu Punkt (x_{i+1}, y_{i+1}).
- F entspricht einem *Differenzenquotienten* $\Delta y / \Delta x$
- F ist nicht das $D = \Delta y / \Delta x$ der exakten Lösung

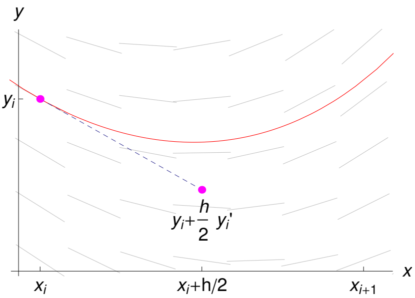
Beim Euler-Verfahren stimmt F mit der Anfangs-Richtung, der Steigung im Startpunkt, überein: $F(x, y, h) = f(x, y)$



Weitere Verfahrensfuntionen $F(x, y, h)$

Modifiziertes Eulerverfahren: $F(x, y, h) = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(x, y)\right)$

- gehe mit Anfangs-Steigung nur den halben Weg
- werte dort das Richtungsfeld neu aus
- verwende diese „Mittelrichtung“ als F

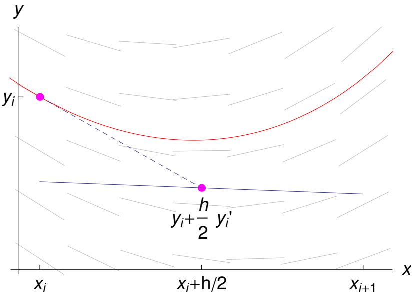


$F \neq D$, aber F trifft deutlich besser als beim einfachen Euler-Verfahren!

Weitere Verfahrensfuntionen $F(x, y, h)$

Modifiziertes Eulerverfahren: $F(x,y,h) = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(x,y)\right)$

- gehe mit Anfangs-Steigung nur den halben Weg
- werte dort das Richtungsfeld neu aus
- verwende diese „Mittelrichtung“ als F

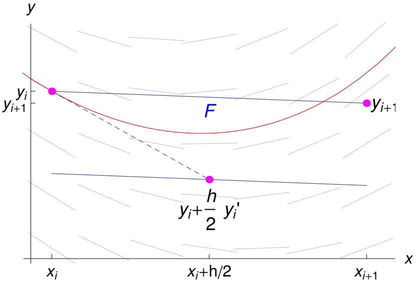


$F \neq D$, aber F trifft deutlich besser als beim einfachen Euler-Verfahren!

Weitere Verfahrensfuntionen $F(x, y, h)$

Modifiziertes Eulerverfahren: $F(x, y, h) = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(x, y)\right)$

- gehe mit Anfangs-Steigung nur den halben Weg
- werte dort das Richtungsfeld neu aus
- verwende diese „Mittelrichtung“ als F

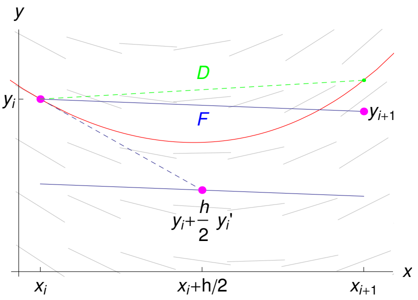


$F \neq D$, aber F trifft deutlich besser als beim einfachen Euler-Verfahren!

Weitere Verfahrensfuntionen $F(x, y, h)$

Modifiziertes Eulerverfahren: $F(x, y, h) = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(x, y)\right)$

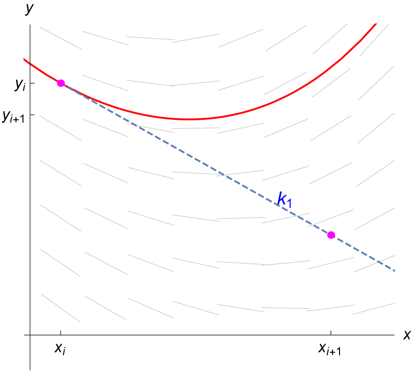
- gehe mit Anfangs-Steigung nur den halben Weg
- werte dort das Richtungsfeld neu aus
- verwende diese „Mittelrichtung“ als F



$F \neq D$, aber F trifft deutlich besser als beim einfachen Euler-Verfahren!

Verfahren von Heun: $F(x, y, h) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$

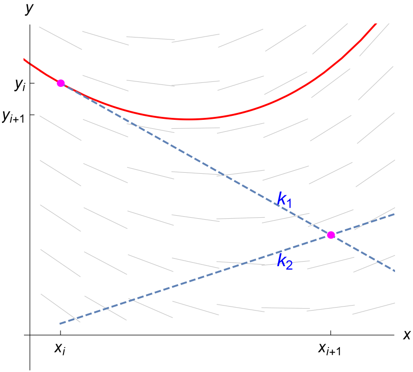
- gehe mit Anfangs-Steigung $k_1 = f(x, y)$ einen Euler-Schritt
- werte das Richtungsfeld neu aus: $k_2 = f(x + h, y + hf(x, y))$
- verwende Mittelwert $(k_1 + k_2)/2$ als F



$F \neq D$, aber F trifft deutlich besser als beim einfachen Euler-Verfahren!

Verfahren von Heun: $F(x, y, h) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$

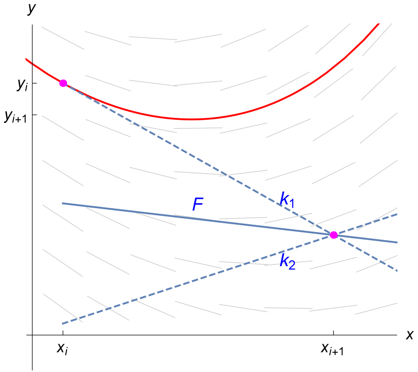
- gehe mit Anfangs-Steigung $k_1 = f(x, y)$ einen Euler-Schritt
- werte das Richtungsfeld neu aus: $k_2 = f(x + h, y + hf(x, y))$
- verwende Mittelwert $(k_1 + k_2)/2$ als F



$F \neq D$, aber F trifft deutlich besser als beim einfachen Euler-Verfahren!

Verfahren von Heun: $F(x,y,h) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$

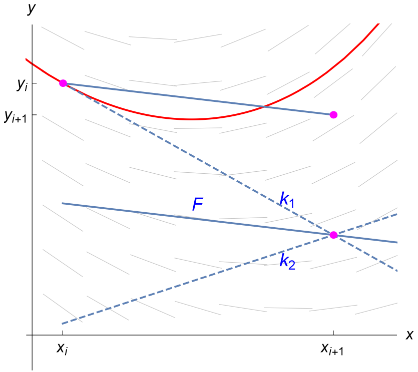
- gehe mit Anfangs-Steigung $k_1 = f(x,y)$ einen Euler-Schritt
- werte das Richtungsfeld neu aus: $k_2 = f(x+h, y+hf(x,y))$
- verwende Mittelwert $(k_1+k_2)/2$ als F



$F \neq D$, aber F trifft deutlich besser als beim einfachen Euler-Verfahren!

Verfahren von Heun: $F(x, y, h) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$

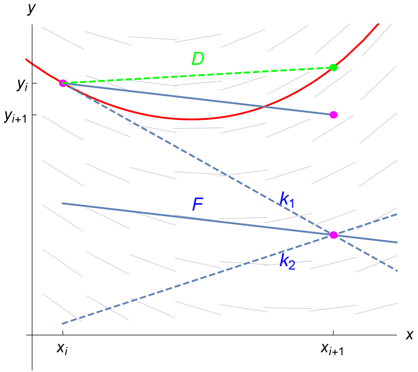
- gehe mit Anfangs-Steigung $k_1 = f(x, y)$ einen Euler-Schritt
- werte das Richtungsfeld neu aus: $k_2 = f(x + h, y + hf(x, y))$
- verwende Mittelwert $(k_1 + k_2)/2$ als F



$F \neq D$, aber F trifft deutlich besser als beim einfachen Euler-Verfahren!

Verfahren von Heun: $F(x,y,h) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$

- gehe mit Anfangs-Steigung $k_1 = f(x,y)$ einen Euler-Schritt
- werte das Richtungsfeld neu aus: $k_2 = f(x+h, y+hf(x,y))$
- verwende Mittelwert $(k_1+k_2)/2$ als F



$F \neq D$, aber F trifft deutlich besser als beim einfachen Euler-Verfahren!

Klassisches Runge-Kutta-Verfahren

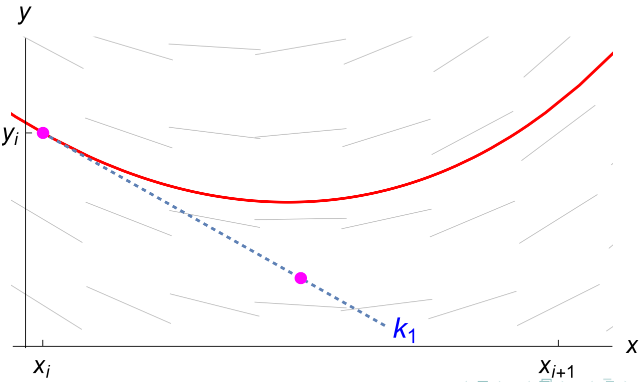
Verfahrensfunktion F ist ein gewichtetes Mittel aus vier Richtungen (Steigungen)

$$F(x, y, h) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

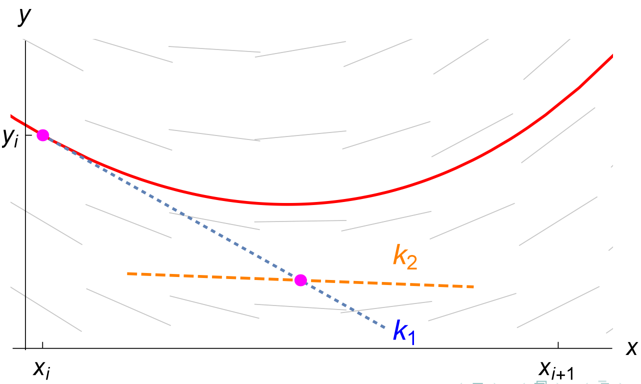
mit

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x, y) \\
k_2 &= f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_1\right) \\
k_3 &= f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_2\right) \\
k_4 &= f(x + h, y + hk_3).
\end{aligned}$$

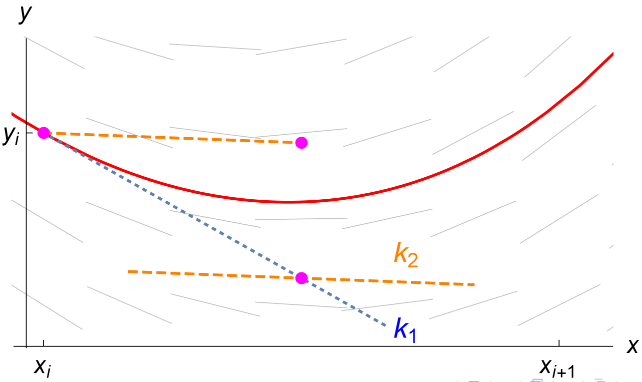
- gehe mit Anfangs-Steigung $k_1 = f(x, y)$ eine halbe Schrittweite
- werte das Richtungsfeld neu aus: $k_2 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_1\right)$
- gehe noch einmal vom Anfang mit Steigung k_2 eine halbe Schrittweite
- werte das Richtungsfeld neu aus: $k_3 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_2\right)$
- gehe noch einmal vom Anfang mit Steigung k_3 eine ganze Schrittweite
- werte das Richtungsfeld neu aus: $k_4 = f(x + h, y + hk_3)$
- endgültiger Schritt mit $F = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$



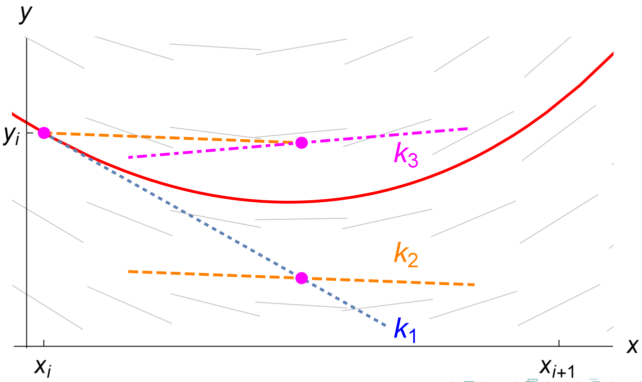
- gehe mit Anfangs-Steigung $k_1 = f(x, y)$ eine halbe Schrittweite
- werte das Richtungsfeld neu aus: $k_2 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_1\right)$
- gehe noch einmal vom Anfang mit Steigung k_2 eine halbe Schrittweite
- werte das Richtungsfeld neu aus: $k_3 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_2\right)$
- gehe noch einmal vom Anfang mit Steigung k_3 eine ganze Schrittweite
- werte das Richtungsfeld neu aus: $k_4 = f(x + h, y + hk_3)$
- endgültiger Schritt mit $F = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$



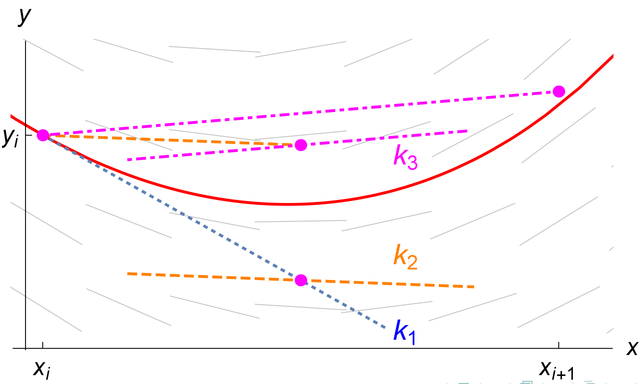
- gehe mit Anfangs-Steigung $k_1 = f(x, y)$ eine halbe Schrittweite
- werte das Richtungsfeld neu aus: $k_2 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} k_1\right)$
- gehe noch einmal vom Anfang mit Steigung k_2 eine halbe Schrittweite
- werte das Richtungsfeld neu aus: $k_3 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} k_2\right)$
- gehe noch einmal vom Anfang mit Steigung k_3 eine ganze Schrittweite
- werte das Richtungsfeld neu aus: $k_4 = f(x + h, y + hk_3)$
- endgültiger Schritt mit $F = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$



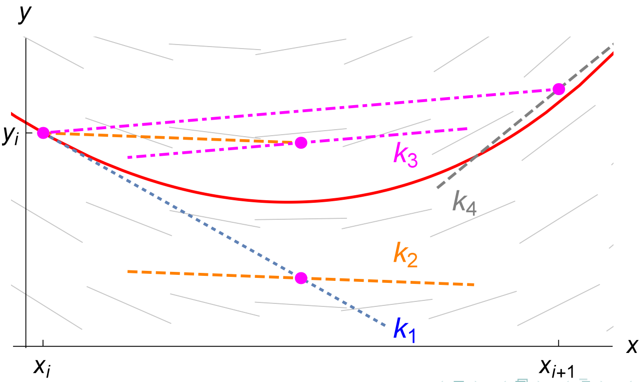
- gehe mit Anfangs-Steigung $k_1 = f(x, y)$ eine halbe Schrittweite
- werte das Richtungsfeld neu aus: $k_2 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} k_1\right)$
- gehe noch einmal vom Anfang mit Steigung k_2 eine halbe Schrittweite
- werte das Richtungsfeld neu aus: $k_3 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} k_2\right)$
- gehe noch einmal vom Anfang mit Steigung k_3 eine ganze Schrittweite
- werte das Richtungsfeld neu aus: $k_4 = f(x + h, y + hk_3)$
- endgültiger Schritt mit $F = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$



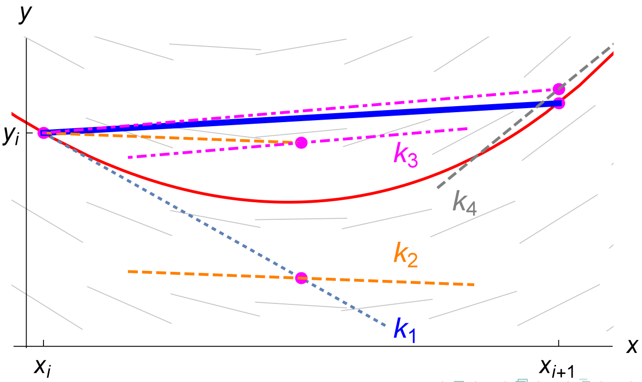
- gehe mit Anfangs-Steigung $k_1 = f(x, y)$ eine halbe Schrittweite
- werte das Richtungsfeld neu aus: $k_2 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} k_1\right)$
- gehe noch einmal vom Anfang mit Steigung k_2 eine halbe Schrittweite
- werte das Richtungsfeld neu aus: $k_3 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} k_2\right)$
- gehe noch einmal vom Anfang mit Steigung k_3 eine ganze Schrittweite
- werte das Richtungsfeld neu aus: $k_4 = f(x + h, y + hk_3)$
- endgültiger Schritt mit $F = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$



- gehe mit Anfangs-Steigung $k_1 = f(x, y)$ eine halbe Schrittweite
- werte das Richtungsfeld neu aus: $k_2 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_1\right)$
- gehe noch einmal vom Anfang mit Steigung k_2 eine halbe Schrittweite
- werte das Richtungsfeld neu aus: $k_3 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_2\right)$
- gehe noch einmal vom Anfang mit Steigung k_3 eine ganze Schrittweite
- werte das Richtungsfeld neu aus: $k_4 = f(x + h, y + hk_3)$
- endgültiger Schritt mit $F = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$



- gehe mit Anfangs-Steigung $k_1 = f(x, y)$ eine halbe Schrittweite
- werte das Richtungsfeld neu aus: $k_2 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} k_1\right)$
- gehe noch einmal vom Anfang mit Steigung k_2 eine halbe Schrittweite
- werte das Richtungsfeld neu aus: $k_3 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} k_2\right)$
- gehe noch einmal vom Anfang mit Steigung k_3 eine ganze Schrittweite
- werte das Richtungsfeld neu aus: $k_4 = f(x + h, y + hk_3)$
- endgültiger Schritt mit $F = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

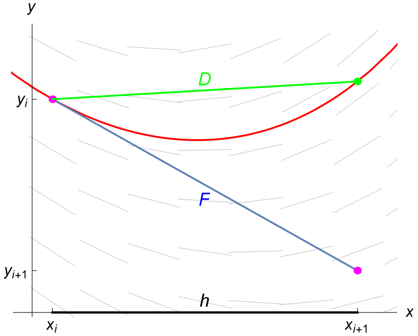


Lokaler Diskretisierungsfehler $d(x, y, h)$

Unterschied zwischen

- Verfahrensfunktion $F = (\Delta y / \Delta x)_{\text{numer}}$ und
- exaktem Differenzenquotienen $D = (\Delta y / \Delta x)_{\text{exakt}}$

$$d(x, y, h) = F(x, y, h) - D(x, y, h)$$



Hier ist die Verfahrensfunktion des einfachen Euler-Verfahrens dargestellt.

Globaler Diskretisierungsfehler

Ist Y die exakte Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \ ,$$

und y_m die Näherungslösung an der Stelle x_m, so nennt man die Differenz

$$e(x_m, h) = y_m - Y(x_m)$$

den *globalen Diskretisierungsfehler*.

Ordnung eines Einschrittverfahrens

Der lokale Diskretisierungsfehler $d(x, y, h)$ wird für $h \to 0$ immer kleiner.

Wie rasch?

Die größte natürliche Zahl p mit

$$d(x, y, h) = O(h^p)$$

heißt *Ordnung des Verfahrens*.

Interpretation

- Ordnung 1 bedeutet, der Fehler direkt proportional zu h ab: halbe Schrittweite, halber Fehler
- Ordnung 2 bedeutet, der Fehler nimmt quadratisch in h ab: halbe Schrittweite viertelt den Fehler

Ordnung eines Einschrittverfahrens

Der lokale Diskretisierungsfehler $d(x, y, h)$ wird für $h \to 0$ immer kleiner.

Wie rasch?

Die größte natürliche Zahl p mit

$$d(x, y, h) = O(h^p)$$

heißt *Ordnung des Verfahrens*.

Interpretation

- Ordnung 1 bedeutet, der Fehler direkt proportional zu h ab: halbe Schrittweite, halber Fehler
- Ordnung 2 bedeutet, der Fehler nimmt quadratisch in h ab: halbe Schrittweite viertelt den Fehler

Ordnung eines Einschrittverfahrens

Der lokale Diskretisierungsfehler $d(x, y, h)$ wird für $h \to 0$ immer kleiner.

Wie rasch?

Die größte natürliche Zahl p mit

$$d(x, y, h) = O(h^p)$$

heißt *Ordnung des Verfahrens*.

Interpretation

- Ordnung 1 bedeutet, der Fehler direkt proportional zu h ab: halbe Schrittweite, halber Fehler
- Ordnung 2 bedeutet, der Fehler nimmt quadratisch in h ab: halbe Schrittweite viertelt den Fehler

Ordnung eines Einschrittverfahrens

Der lokale Diskretisierungsfehler $d(x, y, h)$ wird für $h \to 0$ immer kleiner.

Wie rasch?

Die größte natürliche Zahl p mit

$$d(x, y, h) = O(h^p)$$

heißt *Ordnung des Verfahrens*.

Interpretation

- Ordnung 1 bedeutet, der Fehler direkt proportional zu h ab: halbe Schrittweite, halber Fehler
- Ordnung 2 bedeutet, der Fehler nimmt quadratisch in h ab: halbe Schrittweite viertelt den Fehler

Konvergenz des Einschrittverfahrens

Ist der *lokale Diskretisierungsfehler* von der Ordnung $p \geq 1$ und genügt F einer Lipschitzbedingung, so geht auch der *globale Diskretisierungsfehler* mit dieser Ordnung nach Null: Das Einschrittverfahren ist konvergent von der Ordnung p.

Schrittweite und Fehler

stehen bei Fehlerordnung p im Verhältnis

$$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^p$$

Numerische Lösungverfahren

Wichtige Einschrittverfahren sind

- Explizites Eulerverfahren – das klassische, einfachste Verfahren; heißt auch Eulersche Polygonzugverfahren (ein Verfahren 1. Ordnung)
- Verfahren von Heun, modifiziertes Euler-Verfahren (weil sie genauer sind: Verfahren 2. Ordnung)
- Implizites Eulerverfahren (weil es stabil ist)
- Klassische Runge-Kutta-Verfahren (weil man damit in der Praxis oft rechnet; Verfahren 4. Ordnung).
- RK-Verfahren mit der Dormand-Prince-Formel (weil Matlabs `ode45` damit rechnet, Ordnung 5 mit Kontrollrechnung 4. Ordnung).

Moderne Runge-Kutta-Verfahren

Klassisches RK-Verfahren wertet $f(x, y)$ viermal pro Schritt aus:

$$f(x,y), \quad f\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}k_1\right), \quad f\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}k_2\right), \quad f(x+h, y+hk_3).$$

Neuere Verfahren werten f an speziell günstigen Zwischenstellen aus und liefern gleichzeitig zwei Werte mit unterschiedlicher Fehlerordnung (Differenz $\approx$ Fehler).

Das Verfahren RK5(4) von Dormand und Prince (MATLAB: `ode45`) wertet f sechsmal aus und liefert Ergebnis mit Fehlerordnung 5, verwendet Ergebnis mit Fehlerordnung 4 zur Differenzbildung und Fehlerabschätzung

Ein- und Mehrschrittverfahren

- Runge-Kutta-Verfahren sind *Einschritt-Verfahren*: um $y(x+h)$ zu berechnen, brauchen sie die Lösung nur am unmittelbar vorhergehenden Punkt $y(x)$.
- *Mehrschritt-Verfahren* verwenden zur Berechnung von $y(x+h)$ die Werte von mehreren zurückliegenden Punkten $y(x), y(x-h), y(x-2h) \ldots$.
  Beispiel: Adams-Bashforth-Moulton-Verfahren. Eine Variante davon ist als `ode113` in MATLAB verfügbar.
- Vorteil von *Mehrschritt-Verfahren*: hohe Genauigkeit im Verhältnis zum Rechenaufwand, besonders bei “teurer“ Auswertung von f.
- Nachteil von *Mehrschritt-Verfahren*: Braucht Anlaufphase. Nicht einfach bei variabler Schrittweite.

Fehlerkontrolle, Schrittweitensteuerung

- Fehlerschätzung: Rechne einen Schritt mit hoher Ordnung und nochmal, zur Kontrolle, mit um 1 geringerer Ordnung. Der Unterschied ϵ_1 ist eine Schätzung des tatsächlichen Fehlers.
- Schrittweite und Fehler stehen bei Fehlerordnung p im Verhältnis

$$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^p$$

  Um eine gewünschtes ϵ_2 zu erreichen: Ändere Schrittweite h gemäß

$$h_2 = h_1 \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^{\frac{1}{p}}$$

- Steuerung in Matlab: Schranken für relativen und absoluten Fehler
  `options=odeset('RelTol',1.e-7,'AbsTol',1.e-10)`

Gliederung 8. Vorlesung

Explizite und implizite Einschrittverfahren

Explizit

$$y(x+h) = y(x) + hF(x, y(x), h)$$

links gesuchte Größe, rechts nur bekannte Terme

Implizit

$$y(x+h) = y(x) + hF(x, y(x),\ y(x+h),\ h)$$

gesuchte Größe $y(x+h)$ tritt auf beiden Seiten der Gleichung auf

Explizite Einschrittverfahren sind für gewisse Problemtypen – *steife Differentialgleichungen* – schlecht geeignet.

Implizite Einschrittverfahren sind rechenaufwändiger, haben nicht unbedingt höhere *Ordnung*, aber höhere *Stabilität*.

Explizite und implizite Einschrittverfahren

Explizit

$$y(x+h) = y(x) + hF(x, y(x), h)$$

links gesuchte Größe, rechts nur bekannte Terme

Implizit

$$y(x+h) = y(x) + hF(x, y(x),\ y(x+h),\ h)$$

gesuchte Größe $y(x+h)$ tritt auf beiden Seiten der Gleichung auf

Explizite Einschrittverfahren sind für gewisse Problemtypen – *steife Differentialgleichungen* – schlecht geeignet.
Implizite Einschrittverfahren sind rechenaufwändiger, haben nicht unbedingt höhere *Ordnung*, aber höhere *Stabilität*.

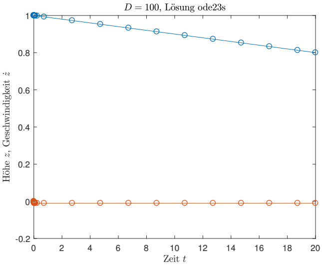
Was sind steife Differentialgleichungen?

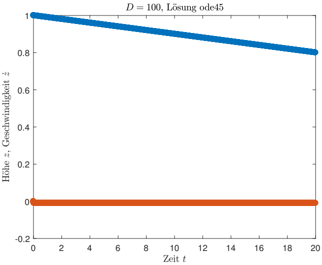
(Das ist ein Vorgriff auf die nächste Einheit)

Bei *steifen* Differentialgleichungen brauchen explizite Einschrittverfahren unvernünftig kleine Schrittweiten, obwohl sich die Lösung pro Schritt nahezu gar nicht ändert.

Beispiel: Freier Fall durch viskoses Medium (Löffel versinkt im Honig)
Bewegungsgleichung für Höhe $z(t)$: $\ddot{z} + D\dot{z} + 1 = 0$ mit $D \gg 1$

Nach kurzer Zeit $t \approx 1/D$ nahezu konstante Sinkgeschwindigkeit. Ab dann verläuft $z(t)$ unspektakulär linear.



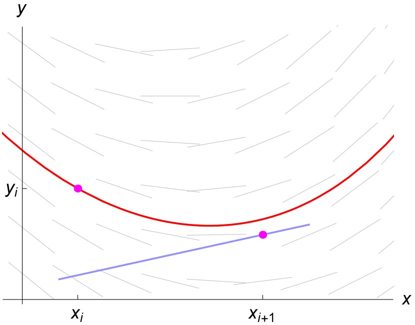


`ode23s`: 31 Rechenpunkte

`ode45` 2441 Rechenpunkte

Implizites Eulerverfahren: $F(x, y(x), h) = f(x+h, y(x+h))$

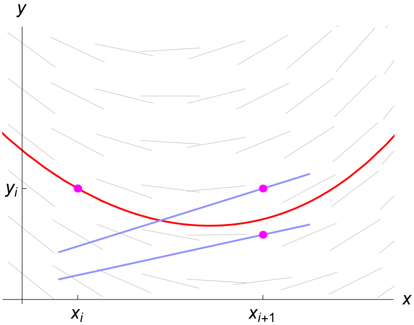
- berechne Steigungen im Endpunkt $x_{i+1} = x + h$
- suche die Steigung, die Startpunkt (x_i, y_i) trifft
- löse dazu eine Gleichung für y_{i+1}



$F \neq D$, ähnlich daneben wie beim expliziten Euler-Verfahren, aber bei *steifen Differentialgleichungen* stabiler.

Implizites Eulerverfahren: $F(x, y(x), h) = f(x + h, y(x + h))$

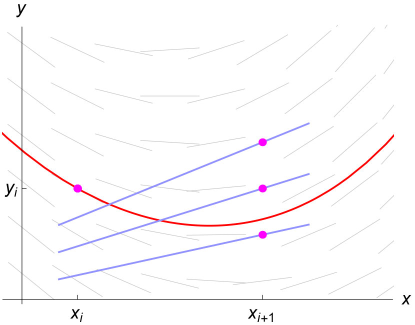
- berechne Steigungen im Endpunkt $x_{i+1} = x + h$
- suche die Steigung, die Startpunkt (x_i, y_i) trifft
- löse dazu eine Gleichung für y_{i+1}



$F \neq D$, ähnlich daneben wie beim expliziten Euler-Verfahren, aber bei *steifen Differentialgleichungen* stabiler.

Implizites Eulerverfahren: $F(x, y(x), h) = f(x + h, y(x + h))$

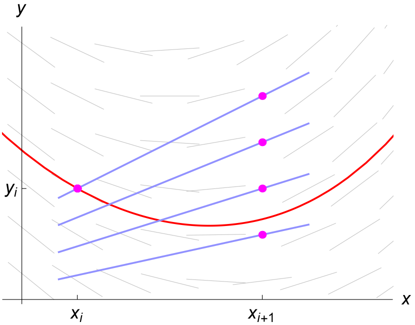
- berechne Steigungen im Endpunkt $x_{i+1} = x + h$
- suche die Steigung, die Startpunkt (x_i, y_i) trifft
- löse dazu eine Gleichung für y_{i+1}



$F \neq D$, ähnlich daneben wie beim expliziten Euler-Verfahren, aber bei *steifen Differentialgleichungen* stabiler.

Implizites Eulerverfahren: $F(x, y(x), h) = f(x + h, y(x + h))$

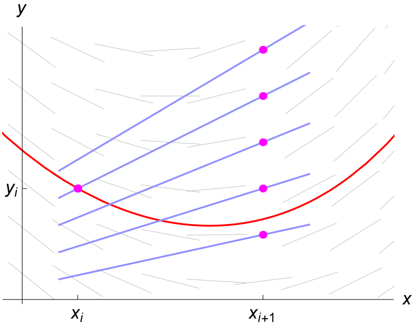
- berechne Steigungen im Endpunkt $x_{i+1} = x + h$
- suche die Steigung, die Startpunkt (x_i, y_i) trifft
- löse dazu eine Gleichung für y_{i+1}



$F \neq D$, ähnlich daneben wie beim expliziten Euler-Verfahren, aber bei *steifen Differentialgleichungen* stabiler.

Implizites Eulerverfahren: $F(x, y(x), h) = f(x + h, y(x + h))$

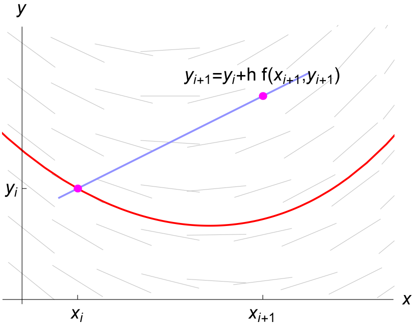
- berechne Steigungen im Endpunkt $x_{i+1} = x + h$
- suche die Steigung, die Startpunkt (x_i, y_i) trifft
- löse dazu eine Gleichung für y_{i+1}



$F \neq D$, ähnlich daneben wie beim expliziten Euler-Verfahren, aber bei *steifen Differentialgleichungen* stabiler.

Implizites Eulerverfahren: $F(x, y(x), h) = f(x+h, y(x+h))$

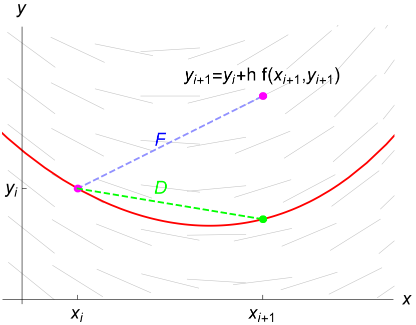
- berechne Steigungen im Endpunkt $x_{i+1} = x + h$
- suche die Steigung, die Startpunkt (x_i, y_i) trifft
- löse dazu eine Gleichung für y_{i+1}



$F \neq D$, ähnlich daneben wie beim expliziten Euler-Verfahren, aber bei *steifen Differentialgleichungen* stabiler.

Implizites Eulerverfahren: $F(x, y(x), h) = f(x + h, y(x + h))$

- berechne Steigungen im Endpunkt $x_{i+1} = x + h$
- suche die Steigung, die Startpunkt (x_i, y_i) trifft
- löse dazu eine Gleichung für y_{i+1}



$F \neq D$, ähnlich daneben wie beim expliziten Euler-Verfahren, aber bei *steifen Differentialgleichungen* stabiler.

Aufgabe: implizites Euler-Verfahren

Gegeben ist für $y = y(x)$ die Differentialgleichung mit Anfangsbedingung

$$y' = -2y(2+x) \qquad y(0) = 1$$

(a) Berechnen Sie mit $h = \frac{1}{2}$ drei Schritte des expliziten Euler-Verfahrens.

(b) Das *implizite* Euler-Verfahren verwendet für eine Differentialgleichung der Form $y'(x) = f(x, y)$ den Rechenschritt

$$y_{i+1} = y_i + h\,f(x_{i+1}, y_{i+1}) \ .$$

Berechnen Sie drei Schritte mit diesem Verfahren. Explizites und implizites Euler-Verfahrens sind nebenstehend grafisch dargestellt. Erklären Sie das unterschiedliche Verhalten.