

Fourierreihen und FFT

10. Vorlesung

170 004 Numerische Methoden I

Clemens Brand und Erika Hausenblas

Montanuniversität Leoben

23. Mai 2019

Fourierreihen, Fouriertransformation

① Fourierreihe

Aufgabenstellung

Basisvektoren und Basisfunktionen

Diskrete Fourierreihe

Diskrete Fourierreihe

Fast Fourier Transform FFT

Aliasing, Denoising

mögliche Prüfungsfragen

Gliederung 10. Vorlesung

1 Fourierreihe

Aufgabenstellung

Basisvektoren und Basisfunktionen

Diskrete Fourierreihe

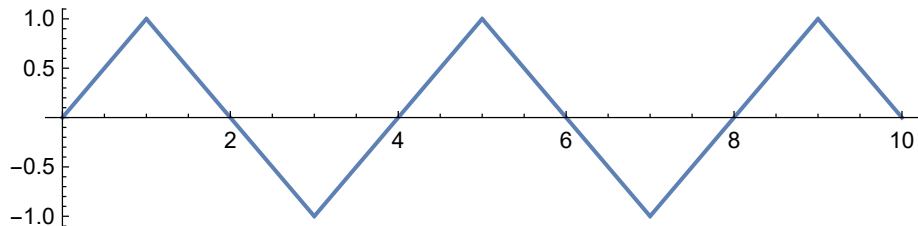
Diskrete Fourierreihe

Fast Fourier Transform FFT

Aliasing, Denoising

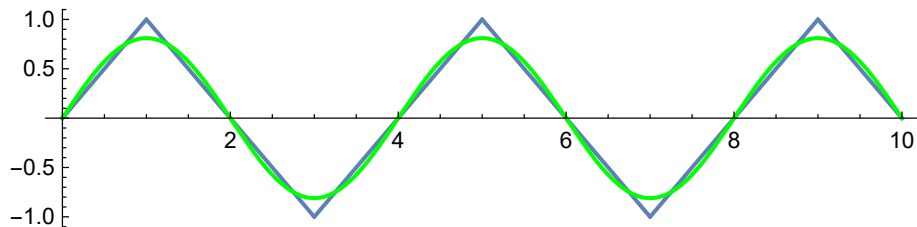
mögliche Prüfungsfragen

Lässt sich diese Dreiecks-Funktion durch Sinus- oder Cosinusfunktionen approximieren?



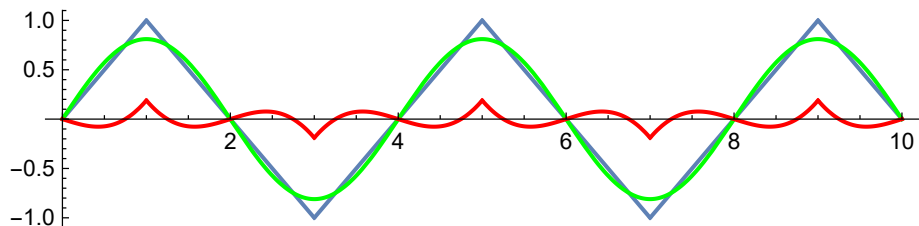
Eine Sinus-Funktion bietet sich an: $\sin(2\pi t/4)$...

Lässt sich diese Dreiecks-Funktion durch Sinus- oder Cosinusfunktionen approximieren?

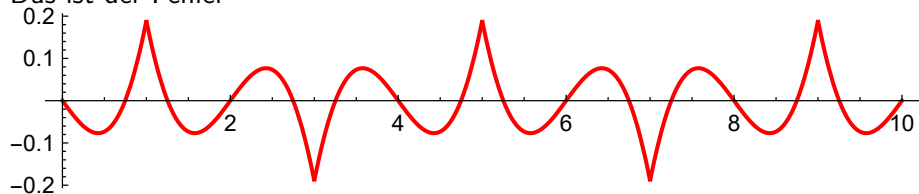


und $\frac{8}{\pi^2} \sin(2\pi t/4)$ passt auch ganz gut, aber...

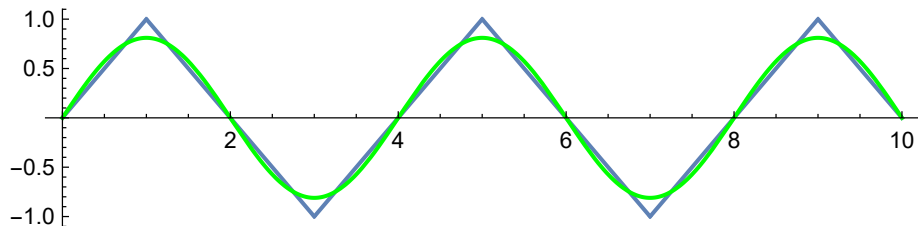
Lässt sich diese Dreiecks-Funktion durch Sinus- oder Cosinusfunktionen approximieren?



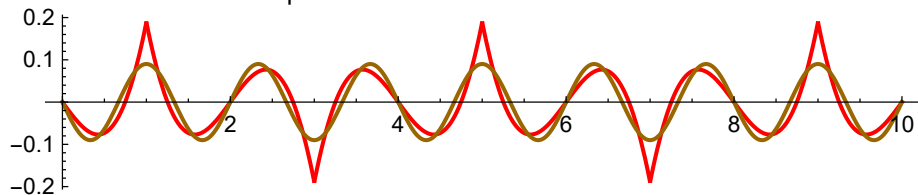
Das ist der Fehler



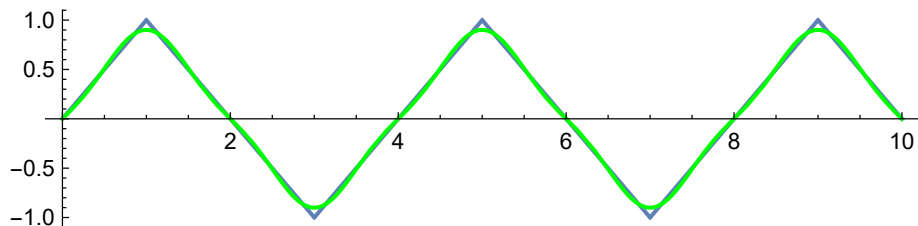
Lässt sich diese Dreiecks-Funktion durch Sinus- oder Cosinusfunktionen approximieren?



Das ist der Fehler—wir passen daran noch eine Sinus-Funktion an

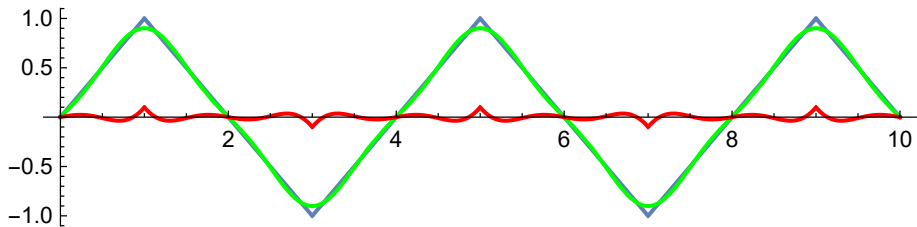


Lässt sich diese Dreiecks-Funktion durch Sinus- oder Cosinusfunktionen approximieren?

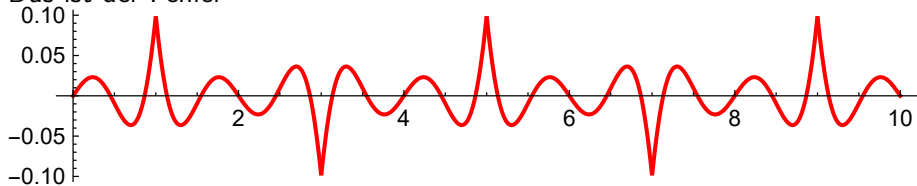


und $\frac{8}{\pi^2} \left[\sin(2\pi t/4) - \frac{1}{9} \sin(6\pi t/4) \right]$ passt schon besser, aber...

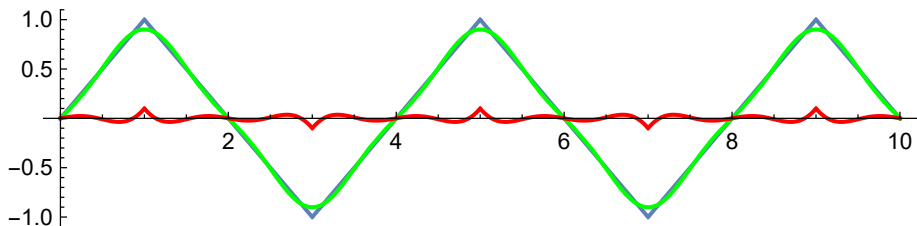
Lässt sich diese Dreiecks-Funktion durch Sinus- oder Cosinusfunktionen approximieren?



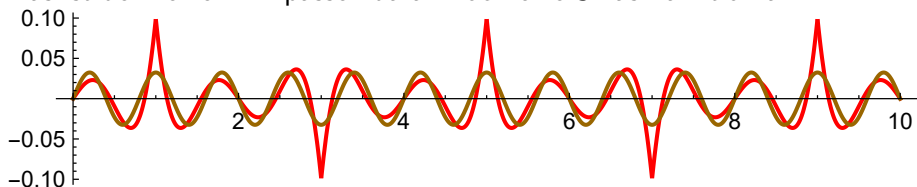
Das ist der Fehler



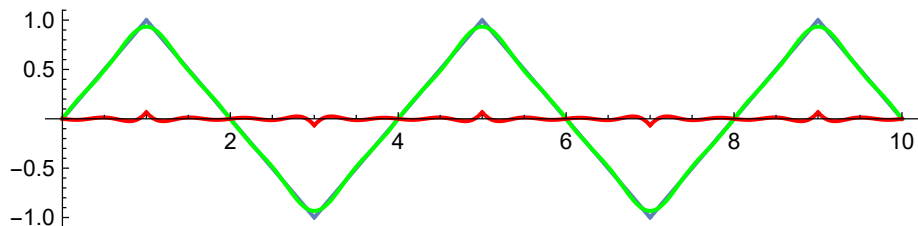
Lässt sich diese Dreiecks-Funktion durch Sinus- oder Cosinusfunktionen approximieren?



Das ist der Fehler—wir passen daran noch eine Sinus-Funktion an

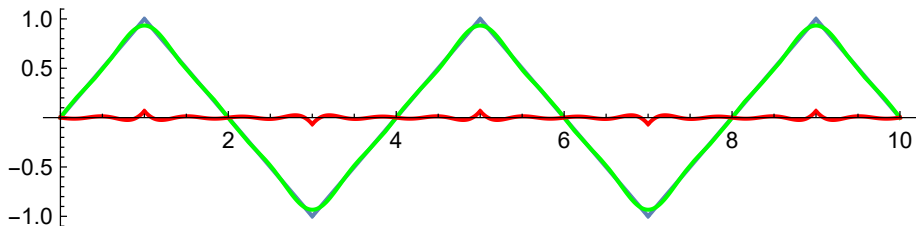


Lässt sich diese Dreiecks-Funktion durch Sinus- oder Cosinusfunktionen approximieren?

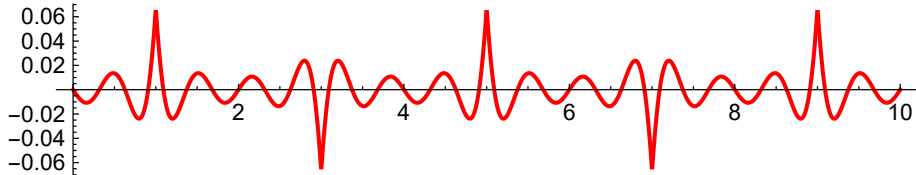


$\frac{8}{\pi^2} \left[\sin(2\pi t/4) - \frac{1}{9} \sin(6\pi t/4) + \frac{1}{25} \sin(10\pi t/4) \right]$ passt noch besser...

Lässt sich diese Dreiecks-Funktion durch Sinus- oder Cosinusfunktionen approximieren?



Das ist der Fehler

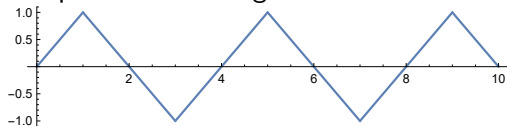


Fourierreihe

stellt eine Funktion als Summe einfacher Sinus- und Cosinuswellen dar

Gegeben: eine periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, Periode T

Beispiel: Dreiecks-Signal



Gesucht:

die Koeffizienten $a_0, a_1, b_1, b_2, \dots$ in der Darstellung

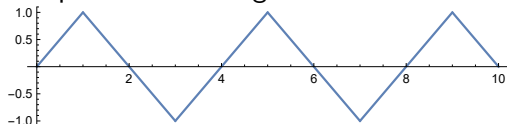
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) \right)$$

Fourierreihe

stellt eine Funktion als Summe einfacher Sinus- und Cosinuswellen dar

Gegeben: eine periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, Periode T

Beispiel: Dreiecks-Signal



$$= \frac{8}{\pi^2} \left[\sin(2\pi t/4) - \dots \right. \\ \left. - \frac{1}{9} \sin(6\pi t/4) + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{25} \sin(10\pi t/4) \pm \dots \right]$$

Gesucht:

die Koeffizienten $a_0, a_1, b_1, b_2, \dots$ in der Darstellung

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) \right)$$

Fourierreihe

Gegeben:

$$f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion (die auf ganz \mathbb{R} periodisch fortgesetzt wird).

Aufgabe:

Zahlen $a_0, a_1, b_1, b_2, \dots$ zu finden, sodass gilt

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + a_2 \cos\left(\frac{4\pi t}{T}\right) + \dots \\ &\quad + b_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + b_2 \sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right) + \dots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) \right). \end{aligned}$$

Fourierreihe

Gegeben:

$$f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion (die auf ganz \mathbb{R} periodisch fortgesetzt wird).

Fourierreihenentwicklung

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + a_2 \cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right) + \dots + a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + \dots \\ + b_1 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + b_2 \sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right) + \dots + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + \dots$$

mit

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt$$

Fourierreihe

Tipps zum Berechnen der Integrale

Auswertung von

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt$$

- ▶ $\frac{a_0}{2}$ ist der Mittelwert der Funktion.
- ▶ Integration erfolgt über eine volle Periode. Integrationsgrenzen lassen sich passend verschieben

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \int_0^T = \int_{\tau}^{\tau+T}$$

- ▶ Symmetrie ausnützen!
Gerade Funktion $f(-x) = f(x)$: nur cos-Terme.
Ungerade Funktion $f(-x) = -f(x)$: nur sin-Terme.

Die Sinus- und Cosinus-Basisfunktionen der Reihe

Wichtige Eigenschaften- deswegen funktioniert es überhaupt!

► Normierung

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin^2(\omega t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2(\omega t) dt = \frac{T}{2} \quad \forall \omega \neq 0$$

► Orthogonalität

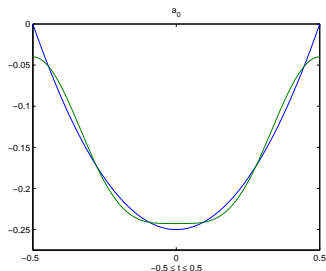
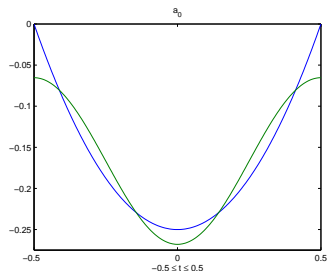
$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(\omega_1 t) \sin(\omega_2 t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t) dt = 0 \quad \forall \omega_1 \neq \omega_2$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t) dt = 0 \quad \forall \omega_1, \omega_2$$

Die Fourierreihe

Die Quadratfunktion

Sei dazu $f(t) = t^2 - 0.5^2$. Im ersten Bild sehen Sie die Funktion und die Näherung für $N = 1, 2, 3, 5, 10$ und 20.



Basisvektoren \iff Basisfunktionen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

und

$$\left\{ \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Basisvektoren \iff Basisfunktionen

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right). \end{aligned}$$

Basisvektoren \iff Basisfunktionen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right). \end{aligned}$$

Basisvektoren \iff Basisfunktionen

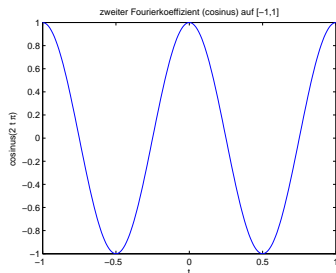
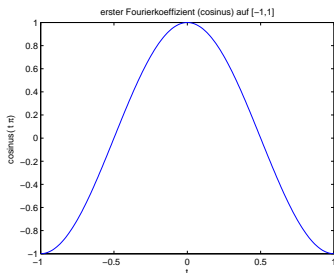


Abbildung: Die ersten Basisfunktion der Familie $\left\{ \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) : n \in \mathbb{N} \right\}$.

Basisvektoren \iff Basisfunktionen

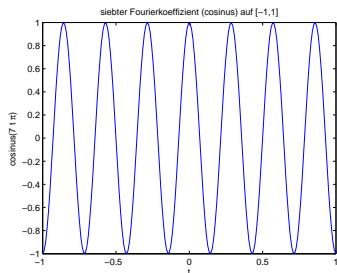
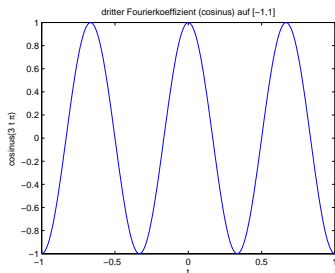


Abbildung: Die ersten Basisfunktion der Familie $\left\{ \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) : n \in \mathbb{N} \right\}$.

Basisvektoren \iff Basisfunktionen

$$x_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$x_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$b_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt, \quad k \geq 1,$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt, \quad k \geq 1,$$

und

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt.$$

Die Fourier-Koeffizienten und die 2-Norm

Eine Art Pythagoräischer Lehrsatz für Funktionen

Für Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \|\mathbf{x}\| \quad \text{Euklidische Länge, 2-Norm}$$

Verallgemeinerung für periodische Funktionen

$$\sqrt{\int_0^T f(t)^2 dt} = \|f\| \quad \text{2-Norm}$$

Es gilt: 2-Norm des Koeffizientenvektors ist 2-Norm der Funktion (bis auf Skalierungsfaktor, und a_0 tanzt wieder aus der Reihe)

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 = \frac{2}{T} \|f\|^2$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^2 = \frac{1}{T} \|f\|^2$$

Fourierreihe: Komplexe Schreibweise

Alle Formeln werden einfacher!

Gegeben:

$$f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion (die auf ganz \mathbb{R} periodisch fortgesetzt wird).

Fourierreihenentwicklung

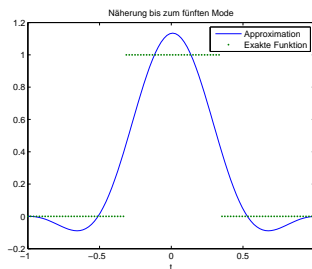
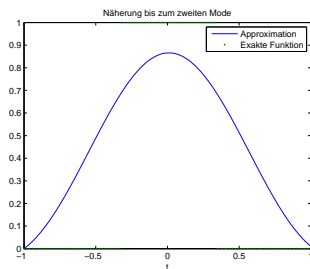
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cos(-in\omega t)$$

mit

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot \exp(-in\omega t) dt$$

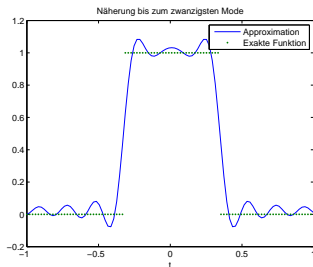
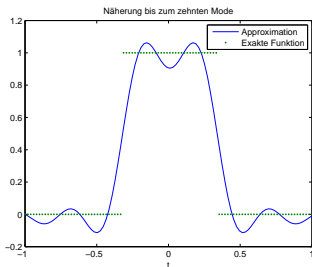
Gibbs'sches Phänomen

$$a_0 = 1/7, a_1 = \frac{1}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{7}\right), a_2 = \dots \text{ und } b_1 = b_2 = \dots = 0.$$



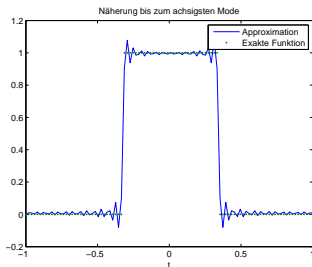
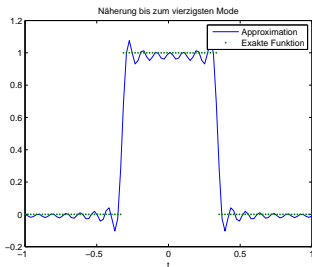
Gibbs'sches Phänomen

$$a_0 = 1/7, a_1 = \frac{1}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{7}\right), a_2 = \dots \text{ und } b_1 = b_2 = \dots = 0.$$



Gibbs'sches Phänomen

$$a_0 = 1/7, a_1 = \frac{1}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{7}\right), a_2 = \dots \text{ und } b_1 = b_2 = \dots = 0.$$



Gibbs'sches Phänomen

Bei Sprungstellen einer Funktion treten Oszillationen auf

- ▶ Je mehr Terme einer Fourierreihe von f summiert werden, desto schmaler und schärfer begrenzt in der Umgebung der Sprungstelle oszilliert die Reihe.
- ▶ Die maximale Abweichung bleibt auch für $n \rightarrow \infty$ im Bereich einiger Prozent der Sprunghöhe. (Keine Konvergenz in der ∞ -Norm.)
- ▶ Die quadrierten Flächeninhalte der Abweichung konvergieren nach 0 für $n \rightarrow \infty$ (Konvergenz im Quadratischen Mittel, in der 2-Norm)

Die Diskrete Fourierreihe

Gegeben:

Sei $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $\pi = \{-\pi = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} = \pi\}$ eine Partition des Intervalls $[-\pi, \pi]$ und $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_0, \dots, \mathbf{f}_{N-1})$ die Funktionswerte der Funktion auf der Partition.

Es gilt ja:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega_k t} dt$$

Approximation des Integrals durch eine Summe:

Gegeben: $(f_j := f(t_j), j = 0, \dots, N)$. Dann gilt

$$c_k \sim \hat{f}(k) := \sum_{j=0}^{N-1} e^{-\frac{2i\pi}{N}jk} f_j, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Die Diskrete Fourierreihe

Gegeben:

Sei $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $\pi = \{-\pi = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} = \pi\}$ eine Partition des Intervalls $[-\pi, \pi]$ und $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_0, \dots, \mathbf{f}_{N-1})$ die Funktionswerte der Funktion auf der Partition.

Es gilt ja:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega_k t} dt$$

Approximation des Integrals durch eine Summe:

Gegeben: $(f_j := f(t_j), j = 0, \dots, N)$. Dann gilt

$$c_k \sim \hat{f}(k) := \sum_{j=0}^{N-1} e^{-\frac{2i\pi}{N}jk} f_j, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Die Diskrete Fourierreihe

Gegeben:

Sei $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $\pi = \{-\pi = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} = \pi\}$ eine Partition des Intervalls $[-\pi, \pi]$ und $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_0, \dots, \mathbf{f}_{N-1})$ die Funktionswerte der Funktion auf der Partition.

Es gilt ja:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega_k t} dt$$

Approximation des Integrals durch eine Summe:

Gegeben: $(f_j := f(t_j), j = 0, \dots, N)$. Dann gilt

$$c_k \sim \hat{f}(k) := \sum_{j=0}^{N-1} e^{-\frac{2i\pi}{N}jk} f_j, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Die Diskrete Fourierreihe

Gegeben:

Sei $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $\pi = \{-\pi = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} = \pi\}$ eine Partition des Intervalls $[-\pi, \pi]$ und $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_0, \dots, \mathbf{f}_{N-1})$ die Funktionswerte der Funktion auf der Partition.

Es gilt ja:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega_k t} dt$$

Approximation der Rücktransformierten:

$$f(t_j) \sim f_j := \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi}{N}(-jk)} \hat{f}(k).$$

Die Diskrete Fourierreihe

Eigenschaften: Die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\frac{2\pi i}{N}} \\ e^{\frac{2\pi i}{N}2} \\ e^{\frac{2\pi i}{N}3} \\ \dots \\ e^{\frac{2\pi i}{N}(N-3)} \\ e^{\frac{2\pi i}{N}(N-2)} \\ e^{\frac{2\pi i}{N}(N-1)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\frac{2\pi i}{N}2} \\ e^{\frac{2\pi i}{N}4} \\ e^{\frac{2\pi i}{N}6} \\ \dots \\ e^{\frac{2\pi i}{N}2(N-3)} \\ e^{\frac{2\pi i}{N}2(N-2)} \\ e^{\frac{2\pi i}{N}2(N-1)} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\frac{2\pi i}{N}(N-1)} \\ e^{\frac{2\pi i}{N}2(N-1)} \\ e^{\frac{2\pi i}{N}3(N-1)} \\ \dots \\ e^{\frac{2\pi i}{N}(N-1)(N-3)} \\ e^{\frac{2\pi i}{N}(N-1)(N-2)} \\ e^{\frac{2\pi i}{N}(N-1)(N-1)} \end{pmatrix},$$

sind orthogonal.

Die schnelle Fouriertransformation

Die Gleichung der Kurve lautet

$$f(x) = 0.3 \exp(-0.9t) (\sin(10\pi t) + \cos(0.2\pi t) - \sin(5\pi t)).$$

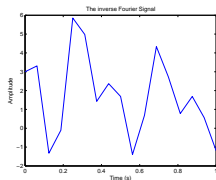
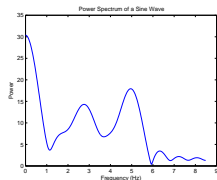
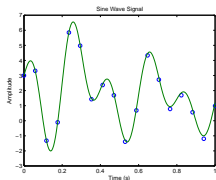


Abbildung: Approximation der Funktion mittels der FFT (17 Datenpunkte)

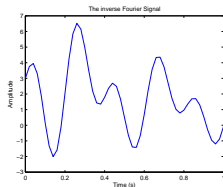
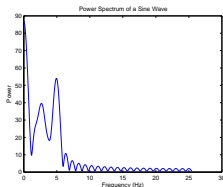
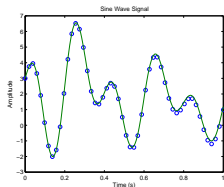


Abbildung: Approximation der Funktion mittels der FFT (51 Datenpunkte)

Aliasing

Aliasing:

Als Alias-Effekte (auch Aliasing-Effekte oder kurz Aliasing) werden im Bereich der Signalanalyse Fehler bezeichnet, die auftreten, wenn im abzutastenden Signal Frequenzanteile vorkommen, die höher als die halbe Abtastfrequenz sind, oder, mit anderen Worten, ein Signal in zu großen Abständen abgetastet wurde.

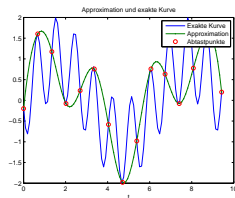
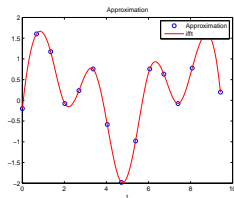
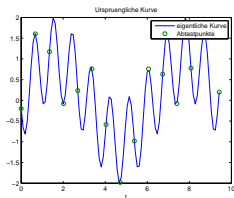
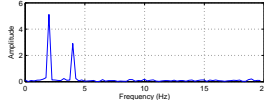
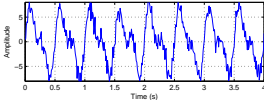
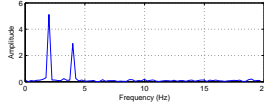
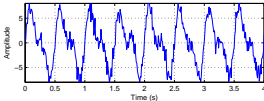
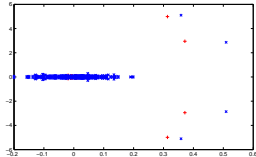
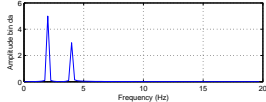
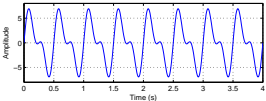
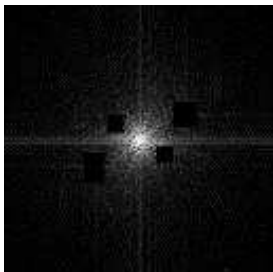
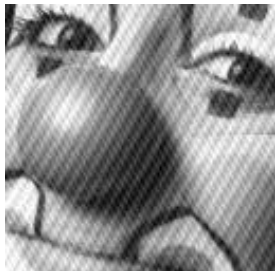


Abbildung: Der Aliasing Effekt

Denoising

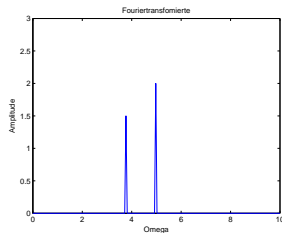


Denoising



mögliche Prüfungsfragen

- ▶ Hier im Bild ist die Fouriertransformierte abgebildet. Wie könnte die zugehörige Funktion aussehen:



- ▶ Können Sie den Begriff *Aliasing* erklären.