Partielle Differentialgleichungen

9. Vorlesung

170 004 Numerische Methoden I

Clemens Brand und Erika Hausenblas

Montanuniversität Leoben

8.6.2017

Gliederung

Partielle Differentialgleichungen

Die Vorlesungsfolien geben eine Themenübersicht. Etwas tiefer geht der Artikel „Partielle Differentialgleichung“ in der deutschen Wikipedia.

- Lineare PDG 1. Ordnung: allgemeine Form
- Lineare PDG 2. Ordnung: allgemeine Form, Klassifikation
- Beispiele elliptischer, hyperbolischer und parabolischer Gleichungen

Partielle Differentialgleichungen Motivation

Laplace Gleichung:

Gegeben ist ein Gebiet $\mathcal{O} = [0,1] \times [0,1]$ und eine Funktion $v : \partial\mathcal{O}^a \to \mathbb{R}$, gesucht ist eine Funktion

$$u : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$$

die folgende Gleichung erfüllt:

$$\frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = 0$$

$$u\big|_{\partial\mathcal{O}} = v.$$

[a] $\partial\mathcal{O}$ bezeichnet den Rand von $\mathcal{O}$.

Partielle Differentialgleichungen Motivation

Poisson Gleichung:

Gegeben ist ein *offenes* Gebiet $\mathcal{O} = [0,1] \times [0,1]$ und Funktionen $v : \partial\mathcal{O} \to \mathbb{R}$, $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, gesucht ist eine Funktion

$$u : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$$

die folgende Gleichung erfüllt:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = f(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \mathcal{O}, \\ &u\big|_{\partial\mathcal{O}} = v. \end{aligned}$$

Anwendungsgebiete:

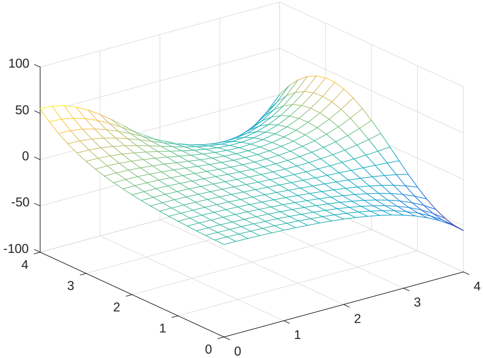
Elektrostatik, Seifenblasen, ...,

Poisson Gleichung:

Randbedingungen:

$\mathcal{O} = [0,4] \times [0,4]$. Die am Rand vorgegebenen Werte sind:

$$f_1(y) = \exp(y) - \cos(y), \quad f_2(y) = \exp(y) * \cos(4) - \exp(4) * \cos(y),$$
$$g_1(x) = \cos(x) - \exp(x), \quad g_2(y) = \exp(4) * \cos(x) - \exp(x) * \cos(4).$$

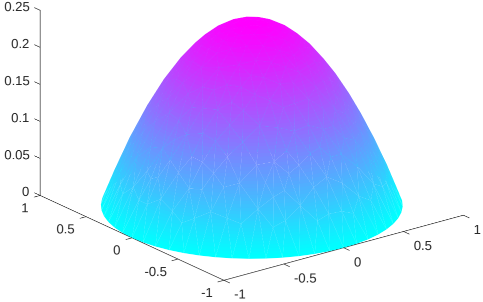


Poisson Gleichung:

Poisson Gleichung auf dem Kreis:

$\mathcal{O} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$,

$$\Delta u(x) = 1.$$



Partielle Differentialgleichungen Motivation

Wärmeleitungsgleichung:

Gegeben ist ein *offenes* Gebiet $\mathcal{O} = [0,1] \times [0,1]$ und eine Funktion $u_0 : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, gesucht ist eine Funktion

$$u : \mathcal{O} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$$

die folgende Gleichung erfüllt:

$$\frac{\partial u(t,x_1,x_2)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2)}{\partial x_2^2}, \quad (x_1,x_2) \in \mathcal{O},\ t > 0,$$

$$u\big|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad u(0,x_1,x_2) = u_0(x_1,x_2).$$

Abkürzung:

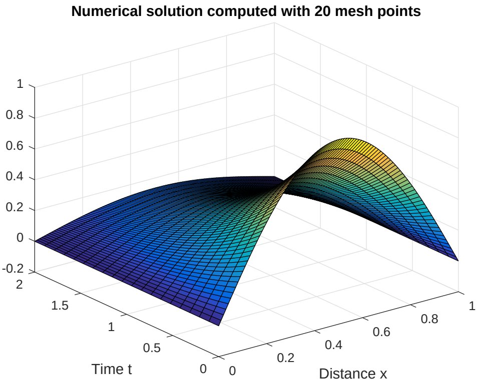
$$\frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_2^2} = \Delta u(x_1,x_2).$$

Wärmeleitungsgleichung:

Numerische Lösung mit 20 Punkten:

$\mathcal{O} = [0, 1]$, Anfangswert ($\epsilon = 0.01$):

$$u_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \text{falls } 0.5 - \epsilon < x < 0.5 + \epsilon, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$



Partielle Differentialgleichungen Motivation

Wellengleichung:

Gegeben ist ein *offenes* Gebiet $\mathcal{O} = [0,1]$ und zwei Funktionen $u_1, u_0 : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, gesucht ist eine Funktion

$$u : \mathcal{O} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$$

die folgende Gleichung erfüllt:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \Delta u(t,x), \quad x \in \mathcal{O},\ t > 0,$$
$$u\big|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad u(0,x) = u_0(x), \quad u_x(0,x) = u_0(x).$$

Anwendungsgebiete:

Vibrationen eines Gehäuses, Maschinendynamik, Brücken, ...,

Partielle Differentialgleichungen

Viele Gleichungen der Physik (Wellen-, Wärmeleitungs-, Potential-, Schrödinger-, Maxwell-, etc.) sind als partielle Differentialgleichungen formuliert.

Eine partielle Differentialgleichung (PDG) enthält Funktionen und deren partielle Ableitungen;

Beispiel: die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}.$$

Nichtlineare Partielle Differentialgleichungen

Weitere wichtige Gleichungen:

- Navier Stokes Gleichung (Fluid Dynamik)
- Burger Gleichung
- Kortweg de Fries Gleichung, Shallow water Gleichung (Tsunami, Wellenausbreitung in einen Kanal)
- Maxwell Gleichungen (Beschreibung eines elektrischen Feldes)

Partielle Differentialgleichungen Motivation

Zu klärende Fragen (Mathematik)

- Es existiert eine Lösung u.
- Die Lösung ist eindeutig.
- Die Lösung ist stabil. Das heißt, ändern sich die gegebenen Anfangsbedingungen stetig (Randwerte, Koeffizienten in der Gleichung, rechte Seite der Gleichung), dann ändert sich die Lösung ebenfalls stetig.

Lineare und quasilineare PDG erster Ordnung

Allgemeine Form für unbekannte Funktion $u(t, x)$

$$au_t + bu_x = e$$

Allgemeine Form für $u(t, x, y, z)$ (Zeit und drei Raumdimensionen)

$$au_t + bu_x + cu_y + du_z = e$$

wobei bei einer lineraren PDG die $a, b, \ldots, e$ gegebene stetig differenzierbare Funktionen von t, x, y, z sind;
Bei einer quasilineraren PDG dürfen die $a, b, \ldots, e$ auch von der gesuchten Funktion u abhängen, allerdings müssen diese Lipschitz stetig sein.
Lösung linearer und quasilinearer PDGs erster Ordnung ist „relativ einfach".

Klassifikation der LPDG 2. Ordng.

Lineare PDG 2. Ordnung

$$Au_{xx} + Bu_{xt} + Cu_{tt} + Du_x + Eu_t + Fu = G$$

Klassifikation

$B^2 - 4AC$	Typ der LPDGL
< 0	*elliptisch*
$= 0$	*parabolisch*
> 0	*hyperbolisch*

Wenn $A, B, C, \ldots, F$ und G Funktionen von x und t sind, kann es vorkommen, dass die LPDGL nicht in allen Bereichen der Ebene vom gleichen Typ ist.

Elliptische PDG

Prototypen elliptischer Gleichungen

- Poisson-Gleichung $u_{xx} + u_{yy} = G$
- Laplace-Gleichung $u_{xx} + u_{yy} = 0$

(Statt Zeit t tritt zweite Raumdimension y als Variable auf!)

Randbedigungen

Randbedingungen für den gesamten Rand des Definitionsgebietes notwendig. Jeder Punkt des Randes beeinflusst Lösung.

- Dirichlet-Randbedingung Funktionswerte u am Rand gegeben
- Neumann-Randbed. Ableitung du/dn normal zum Rand geg.

Elliptische PDG

Prototypen elliptischer Gleichungen

- Poisson-Gleichung $u_{xx} + u_{yy} = G$
- Laplace-Gleichung $u_{xx} + u_{yy} = 0$

(Statt Zeit t tritt zweite Raumdimension y als Variable auf!)

Randbedigungen

Randbedingungen für den gesamten Rand des Definitionsgebietes notwendig. Jeder Punkt des Randes beeinflusst Lösung.

- Dirichlet-Randbedingung — Funktionswerte u am Rand gegeben
- Neumann-Randbed. — Ableitung du/dn normal zum Rand geg.

Approximation von PDEs

Idee: Differentialquotient

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(u(x+h) - u(x))$$

Approximation von PDEs

Approximation:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} \simeq \frac{1}{h}(u(x+h) - u(x))$$

Approximation:

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} \simeq \frac{1}{h}(u(x-h) - 2u(x) + u(x+h))$$

Approximation von PDEs

$$\Delta_h = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Das Gleichungssystem $f = \Delta u$ wird approximiert durch

$$\begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \\ f(x_n) \end{pmatrix} = \Delta_h \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

Parabolische PDG

Prototyp einer parabolischen Gleichung

Die Wärmeleitungsgleichung $u_t = au_{xx}$
beschreibt ein orts- und zeitabhängiges Temperaturfeld. Die Lösung u an einem Punkt (x, t) wird vom gesamten in der Vergangenheit liegenden Bereich der Anfangs- und Randbedingungen beeinflusst.
Anfangsbedingung: u gegeben
Randbedingungen: u oder du/dn (Dirichlet- bzw. Neumann-RBD)

Wärmeleitungsgleichung: Beispiel

Gesucht ist $u = u(x, t)$ mit

$$u_{xx} = u_t \qquad \text{für } 0 < x < 1, t > 0$$

mit den Rand- und Anfangsbedingungen

$$u(0, t) = T_L, u(1, t) = T_R, u(x, 0) = T_{init}(x)$$

Beschreibt die Temperaturverteilung in einem nach außen hin isolierten Stab, an dessen linken (rechten) Ende $T = T_L$ ($T = T_R$) konstant gehalten wird. Anfangs herrsch Temperatur $T_{init}(x)$

MATLAB: pdepe

MATLAB-Löser pdepe (Demo in Vorlesung)
Für parabolische Probleme in der Form (etwas allgemeiner als die vorige Definition)

$$c(x,t,u,u_x)u_t = \frac{\partial}{\partial x} f(x,t,u,u_x) + s(x,t,u,u_x)$$

mit Randbedingungen am linken und Rechden Rand des x-Bereiches

$$p(x,t,u) + q(x,t)f(x,t,u,u_x) = 0$$

bietet MATLAB eine Löser an.
Für $c = 1$, $s = 0$, $f = u_x$, $q = 0$, $p = u - T_L$ oder $p = u - T_R$ ergibt sich die Wäermeleitungsgleichung des vorigen Beispiels.

Hyperbolische PDG

Prototyp einer hyperbolischen Gleichung

Die Wellengleichung $u_{tt} = c^2 u_{xx}$

beschreibt Wellen, die sich mit Geschwindigkeit c ausbreiten. Die Lösung u an einem Punkt (x, t) wird (wegen endlicher Ausbreitungsgeschwindigkeit) nur von einem endlichen Bereich der Anfangsbedingungen und des Randes beeinflusst.

Anfangsbedingungen: u und u_t gegeben

Randbedingungen: u oder du/dn gegeben.

Lösung ist aufwendiger und schwieriger als bei GDG. Nur für spezielle PDE-Typen sind Löser in MATLAB verfügbar.