# Fourierreihen und FFT

11. und 12. Vorlesung
170 004 Numerische Methoden I

Clemens Brand und Erika Hausenblas

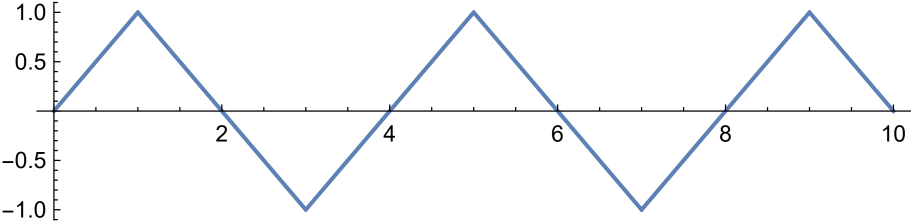
Montanuniversität Leoben

14. und 21. Juni 2018

# Fourierreihen, Fouriertransformation

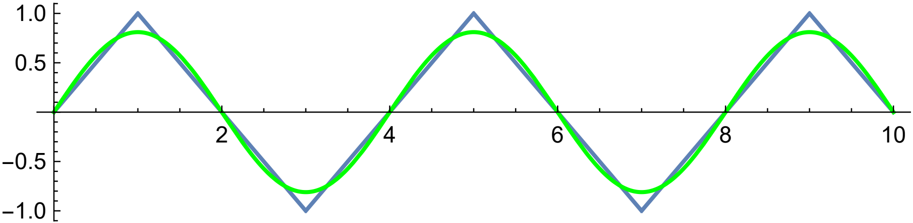
# Gliederung 11. Vorlesung

# Lässt sich diese Dreiecks-Funktion durch Sinus- oder Cosinusfunktionen approximieren?



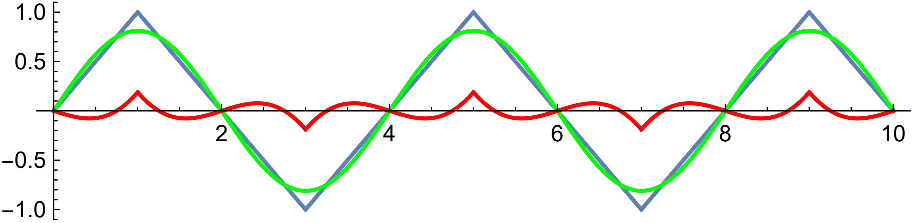

Eine Sinus-Funktion bietet sich an: $\sin(2\pi t/4)\ldots$

# Lässt sich diese Dreiecks-Funktion durch Sinus- oder Cosinusfunktionen approximieren?

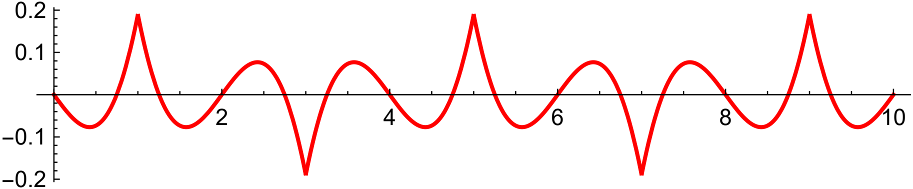



und $\frac{8}{\pi^2}\sin(2\pi t/4)$ passt auch ganz gut, aber...

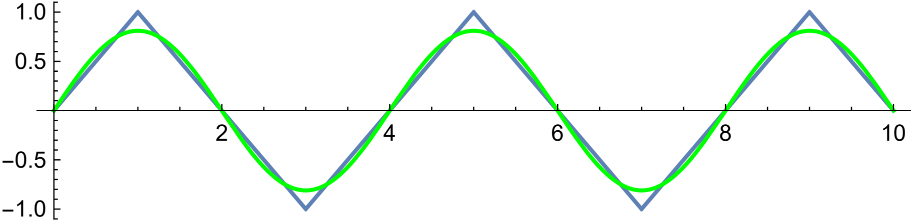
# Lässt sich diese Dreiecks-Funktion durch Sinus- oder Cosinusfunktionen approximieren?



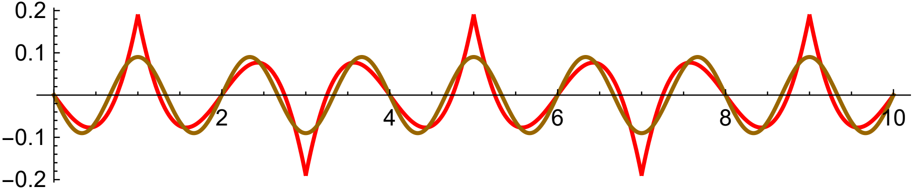

Das ist der Fehler



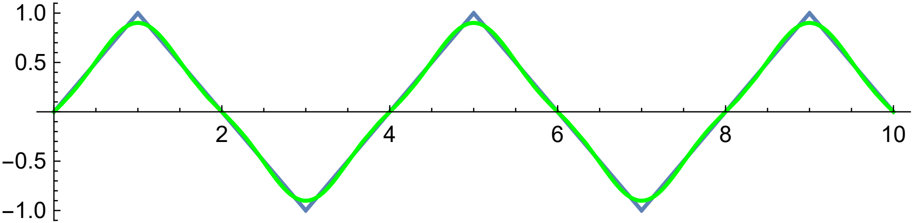
# Lässt sich diese Dreiecks-Funktion durch Sinus- oder Cosinusfunktionen approximieren?




Das ist der Fehler–wir passen daran noch eine Sinus-Funktion an

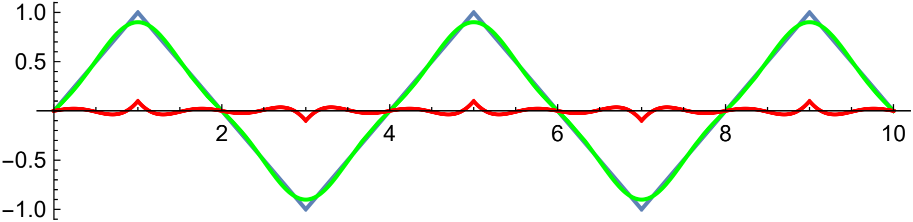


# Lässt sich diese Dreiecks-Funktion durch Sinus- oder Cosinusfunktionen approximieren?

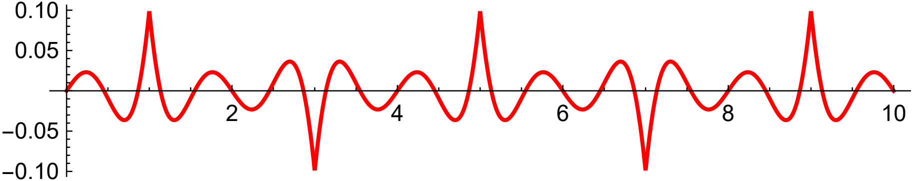



und $\frac{8}{\pi^2}\left[\sin(2\pi t/4) - \frac{1}{9}\sin(6\pi t/4)\right]$ passt schon besser, aber...

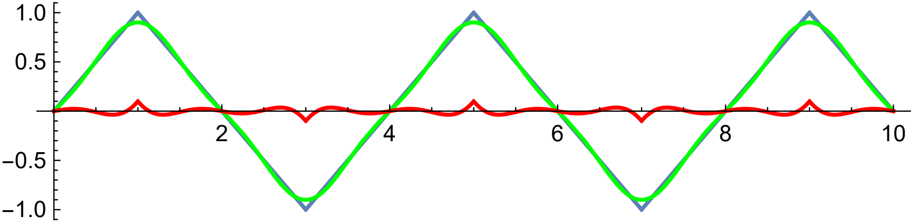
# Lässt sich diese Dreiecks-Funktion durch Sinus- oder Cosinusfunktionen approximieren?



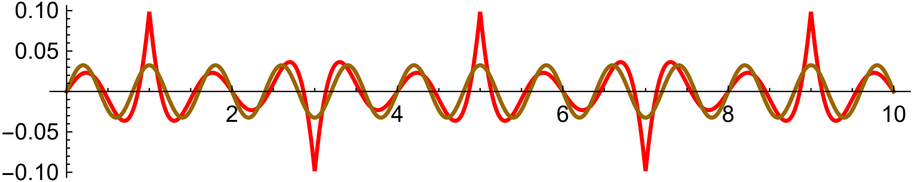

Das ist der Fehler



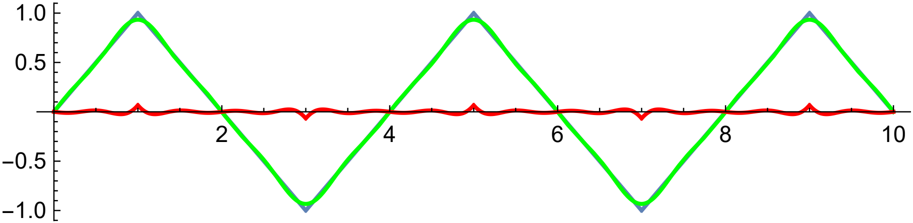
# Lässt sich diese Dreiecks-Funktion durch Sinus- oder Cosinusfunktionen approximieren?




Das ist der Fehler–wir passen daran noch eine Sinus-Funktion an

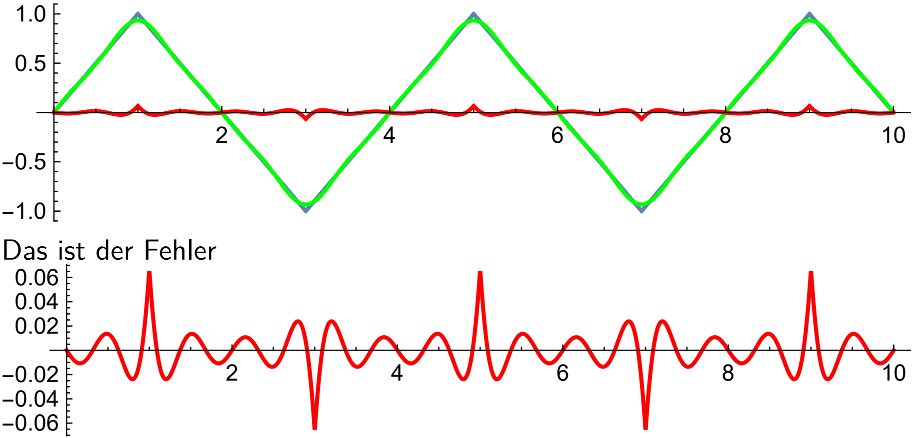


# Lässt sich diese Dreiecks-Funktion durch Sinus- oder Cosinusfunktionen approximieren?




$\frac{8}{\pi^2}\left[\sin(2\pi t/4) - \frac{1}{9}\sin(6\pi t/4) + \frac{1}{25}\sin(10\pi t/4)\right]$ passt noch besser...

# Lässt sich diese Dreiecks-Funktion durch Sinus- oder Cosinusfunktionen approximieren?

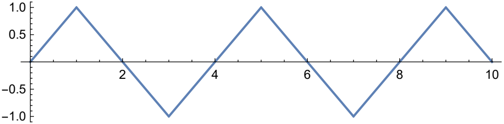


# Fourierreihe

stellt eine Funktion als Summe einfacher Sinus- und Cosinuswellen dar

## Gegeben: eine periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, Periode $T$

Beispiel: Dreiecks-Signal




## Gesucht:

die Koeffizienten $a_0, a_1, b_1, b_2, \ldots$ in der Darstellung

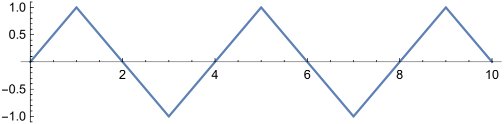
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) \right)$$

# Fourierreihe

stellt eine Funktion als Summe einfacher Sinus- und Cosinuswellen dar

## Gegeben: eine periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, Periode $T$

Beispiel: Dreiecks-Signal




$$= \frac{8}{\pi^2} \Big[\sin(2\pi t/4) - \dots - \frac{1}{9}\sin(6\pi t/4) + \dots + \frac{1}{25}\sin(10\pi t/4) \pm \dots \Big]$$

## Gesucht:

die Koeffizienten $a_0,\ a_1,\ b_1,\ b_2, \dots$ in der Darstellung

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) \right)$$

# Fourierreihe

## Gegeben:

$$f : [0,\ T] \to \mathbb{R}$$

eine Funktion (die auf ganz $\mathbb{R}$ periodisch fortgesetzt wird).

## Aufgabe:

Zahlen $a_0$, $a_1$, $b_1$, $b_2$,... zu finden, sodass gilt

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + a_2 \cos\left(\frac{4\pi t}{T}\right) + \dots \\ &\quad + b_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + b_2 \sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right) + \dots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)\right). \end{aligned}$$

# Fourierreihe

## Gegeben:

$$f : [0,\ T] \to \mathbb{R}$$

eine Funktion (die auf ganz $\mathbb{R}$ periodisch fortgesetzt wird).

## Fourierreihenentwicklung

$$\begin{aligned} f(t) = \frac{a_0}{2} &+ a_1 \cos(\frac{2\pi}{T} t) + a_2 \cos(\frac{4\pi}{T} t) + \cdots + a_n \cos(\frac{2\pi n}{T} t) + \cdots \\ &+ b_1 \sin(\frac{2\pi}{T} t) + b_2 \sin(\frac{4\pi}{T} t) + \cdots + b_n \sin(\frac{2\pi n}{T} t) + \cdots \end{aligned}$$

mit

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \cos(\frac{2\pi n}{T} t)\,\mathrm{d}t \qquad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \sin(\frac{2\pi n}{T} t)\,\mathrm{d}t$$

# Fourierreihe

## Tipps zum Berechnen der Integrale

### Auswertung von

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot\cos\Big(\frac{2\pi n}{T}t\Big)\,\mathrm{d}t \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot\sin\Big(\frac{2\pi n}{T}t\Big)\,\mathrm{d}t$$

- $\frac{a_0}{2}$ ist der Mittelwert der Funktion.
- Integration erfolgt über eine volle Periode. Integrationsgrenzen lassen sich passend verschieben

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \int_0^T = \int_\tau^{\tau+T}$$

- Symmetrie ausnützen!
  Gerade Funktion $f(-x) = f(x)$: nur cos-Terme.
  Ungerade Funktion $f(-x) = -f(x)$: nur sin-Terme.

# Die Sinus- und Cosinus-Basisfunktionen der Reihe

## Wichtige Eigenschaften- deswegen funktioniert es überhaupt!

- Normierung

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin^2(\omega t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{T}{2} \quad \forall \omega \neq 0$$

- Orthogonalität

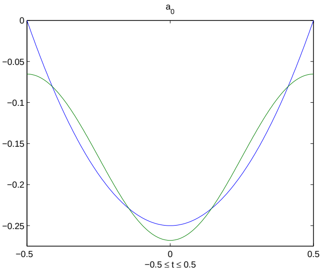
$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \forall \omega_1 \neq \omega_2$$

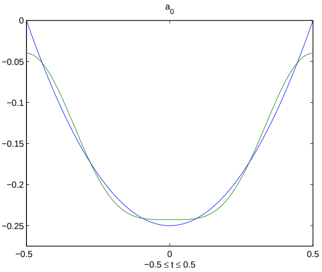
$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \forall \omega_1, \omega_2$$

# Die Fourierreihe

## Die Quadratfunktion

Sei dazu $f(t) = t^2 - 0.5^2$. Im ersten Bild sehen Sie die Funktion und die Näherung für $N = 1, 2, 3, 5, 10$ und $20$.



# Basisvektoren $\Longleftrightarrow$ Basisfunktionen

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\left\{\sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$$

und

$$\left\{\cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$$

# Basisvektoren $\Longleftrightarrow$ Basisfunktionen

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right). \end{aligned}$$

# Basisvektoren $\Longleftrightarrow$ Basisfunktionen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(t) = {} & a_0 \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right). \end{aligned}$$

# Basisvektoren $\Longleftrightarrow$ Basisfunktionen

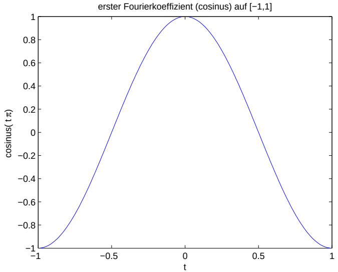
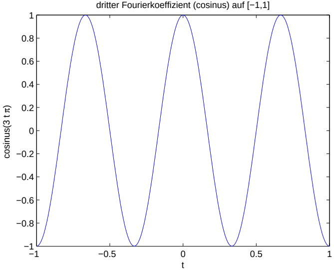



Abbildung: Die ersten Basisfunktion der Familie $\left\{\cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$.

# Basisvektoren $\Longleftrightarrow$ Basisfunktionen



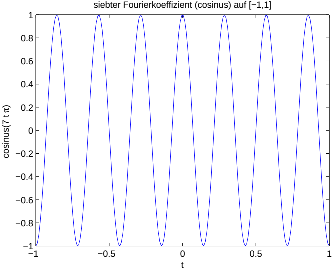




Abbildung: Die ersten Basisfunktion der Familie $\left\{\cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$.

# Basisvektoren $\Longleftrightarrow$ Basisfunktionen

$$x_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$x_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$b_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right)\,dt,\ k \geq 1,$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right)\,dt\ k \geq 1,$$

und

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt.$$

# Die Fourier-Koeffizienten und die 2-Norm

## Eine Art Pythagoräischer Lehsatz für Funktionen

Für Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \|\mathbf{x}\| \quad \text{Euklidische Länge, 2-Norm}$$

Verallgemeinerung für periodische Funktionen

$$\sqrt{\int_0^T f(t)^2\, dt} = \|f\| \quad \text{2-Norm}$$

Es gilt: 2-Norm des Koeffizientenvektors ist 2-Norm der Funktion (bis auf Skalierungsfaktor, und $a_0$ tanzt wieder aus der Reihe)

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 = \frac{2}{T}\|f\|^2$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^2 = \frac{1}{T}\|f\|^2$$

# Fourierreihe: Komplexe Schreibweise

## Alle Formeln werden einfacher!

### Gegeben:

$$f : [0,\ T] \to \mathbb{R}$$

eine Funktion (die auf ganz $\mathbb{R}$ periodisch fortgesetzt wird).

### Fourierreihenentwicklung

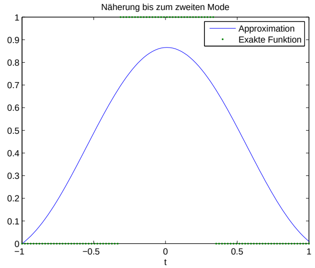
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cos(-in\omega t)$$

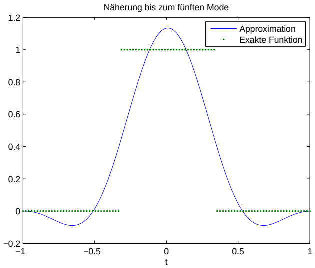
mit

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot \exp(-in\omega t)\,\mathrm{d}t$$

# Gibbs'sches Phänomen

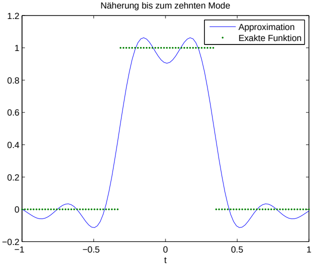
$a_0 = 1/7,\ a_1 = \frac{1}{\pi}\cos(\frac{\pi}{7}),\ a_2 = ..$ und $b_1 = b_2 = \cdots = 0.$

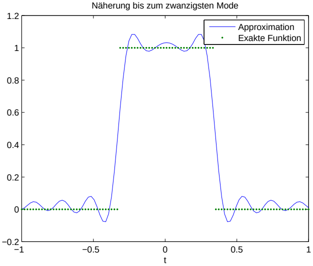


# Gibbs'sches Phänomen

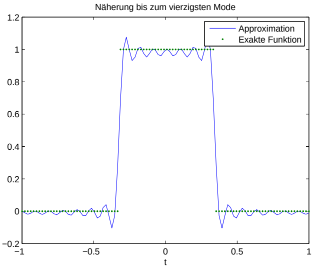
$$a_0 = 1/7,\ a_1 = \frac{1}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{7}\right),\ a_2 = ..\ \text{und}\ b_1 = b_2 = \cdots = 0.$$

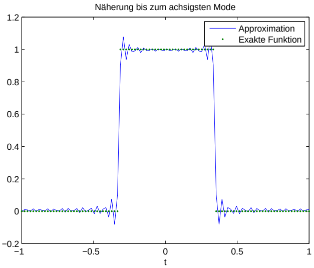


# Gibbs'sches Phänomen

$$a_0 = 1/7,\ a_1 = \frac{1}{\pi}\cos(\frac{\pi}{7}),\ a_2 = ..\ \text{und}\ b_1 = b_2 = \cdots = 0.$$



# Gibbs'sches Phänomen

## Bei Sprungstellen einer Funktion treten Oszillationen auf

- Je mehr Terme einer Fourierreihe von $f$ summiert werden, desto schmäler und schärfer begrenzt in der Umgebung der Sprungstelle oszilliert die Reihe.
- Die maximale Abweichung bleibt auch für $n \to \infty$ im Bereich einiger Prozent der Sprunghöhe. (Keine Konvergenz in der $\infty$-Norm.)
- Die quadrierten Flächeninhalte der Abweichung konvergieren nach 0 für $n \to \infty$ (Konvergenz im Quadratischen Mittel, in der 2-Norm)

# Die Diskrete Fourierreihe

## Gegeben:

Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $\pi = \{-\pi = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} = \pi\}$ eine Partition des Intervalls $[-\pi, \pi]$ und $\mathbf{f} = (\mathbf{f_0}, \ldots, \mathbf{f_{N-1}})$ die Funktionswerte der Funktion auf der Partition.

## Es gilt ja:

$$c_k \quad = \quad \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-i\omega_k t}\, dt$$

## Approximation des Integrals durch eine Summe:

Gegeben: $(f_j := f(t_j),\ j = 0, \ldots, N)$. Dann gilt

$$c_k \quad \sim \quad \hat{f}(k) := \sum_{j=0}^{N-1} e^{-\frac{2i\pi}{N} jk} f_j, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

# Die Diskrete Fourierreihe

## Gegeben:

Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $\pi = \{-\pi = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} = \pi\}$ eine Partition des Intervalls $[-\pi, \pi]$ und $\mathbf{f} = (\mathbf{f_0}, \ldots, \mathbf{f_{N-1}})$ die Funktionswerte der Funktion auf der Partition.

## Es gilt ja:

$$c_k \quad = \quad \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-i\omega_k t}\, dt$$

## Approximation des Integrals durch eine Summe:

Gegeben: $(f_j := f(t_j),\ j = 0, \ldots, N)$. Dann gilt

$$c_k \quad \sim \quad \hat{f}(k) := \sum_{j=0}^{N-1} e^{-\frac{2i\pi}{N} jk} f_j, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

# Die Diskrete Fourierreihe

## Gegeben:

Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $\pi = \{-\pi = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} = \pi\}$ eine Partition des Intervalls $[-\pi, \pi]$ und $\mathbf{f} = (\mathbf{f_0}, \ldots, \mathbf{f_{N-1}})$ die Funktionswerte der Funktion auf der Partition.

## Es gilt ja:

$$c_k \quad = \quad \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-i\omega_k t}\, dt$$

## Approximation des Integrals durch eine Summe:

Gegeben: $(f_j := f(t_j),\ j = 0, \ldots, N)$. Dann gilt

$$c_k \quad \sim \quad \hat{f}(k) := \sum_{j=0}^{N-1} e^{-\frac{2i\pi}{N} jk} f_j, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

# Die Diskrete Fourierreihe

## Gegeben:

Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $\pi = \{-\pi = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} = \pi\}$ eine Partition des Intervalls $[-\pi, \pi]$ und $\mathbf{f} = (\mathbf{f_0}, \ldots, \mathbf{f_{N-1}})$ die Funktionswerte der Funktion auf der Partition.

## Es gilt ja:

$$c_k \quad = \quad \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-i\omega_k t}\, dt$$

## Approximation der Rücktransformierten:

$$f(t_j) \quad \sim \quad f_j := \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi}{N}(-jk)} \hat{f}(k).$$

# Die Diskrete Fourierreihe

Eigenschaften: Die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\frac{2\pi i}{N}} \\ e^{\frac{2\pi i}{N}2} \\ e^{\frac{2\pi i}{N}3} \\ \dots \\ e^{\frac{2\pi i}{N}(N-3)} \\ e^{\frac{2\pi i}{N}(N-2)} \\ e^{\frac{2\pi i}{N}(N-1)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\frac{2\pi i}{N}2} \\ e^{\frac{2\pi i}{N}4} \\ e^{\frac{2\pi i}{N}6} \\ \dots \\ e^{\frac{2\pi i}{N}2(N-3)} \\ e^{\frac{2\pi i}{2}(N-2)} \\ e^{\frac{2\pi i}{2}(N-1)} \end{pmatrix}, \quad \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\frac{2\pi i}{N}(N-1)} \\ e^{\frac{2\pi i}{N}2(N-1)} \\ e^{\frac{2\pi i}{N}3(N-1)} \\ \dots \\ e^{\frac{2\pi i}{N}(N-1)(N-3)} \\ e^{\frac{2\pi i}{N}(N-1)(N-2)} \\ e^{\frac{2\pi i}{N}(N-1)(N-1)} \end{pmatrix},$$

sind orthogonal.

# Die schnelle Fouriertransformation

Die Gleichung der Kurve lautet

$$f(x) = 0.3\,\exp(-0.9t)\,\left(\sin(10\pi t) + \cos(0.2\pi t) - \sin(5\pi t)\right).$$

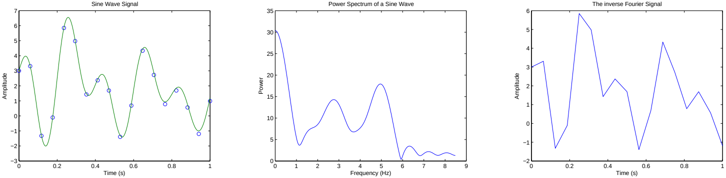



Abbildung: Approximation der Funktion mittels der FFT (17 Datenpunkte)

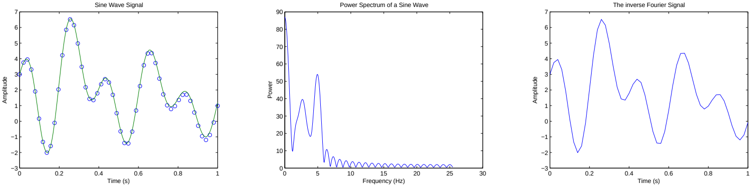



Abbildung: Approximation der Funktion mittels der FFT (51 Datenpunkte)

# Aliasing

## Aliasing:

Als Alias-Effekte (auch Aliasing-Effekte oder kurz Aliasing) werden im Bereich der Signalanalyse Fehler bezeichnet, die auftreten, wenn im abzutastenden Signal Frequenzanteile vorkommen, die höher als die halbe Abtastfrequenz sind, oder, mit anderen Worten, ein Signal in zu großen Abständen abgetastet wurde.

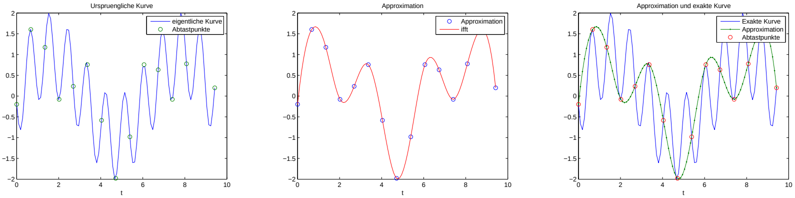
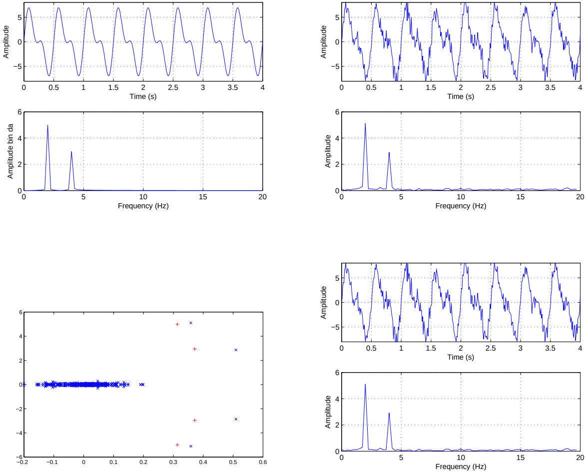
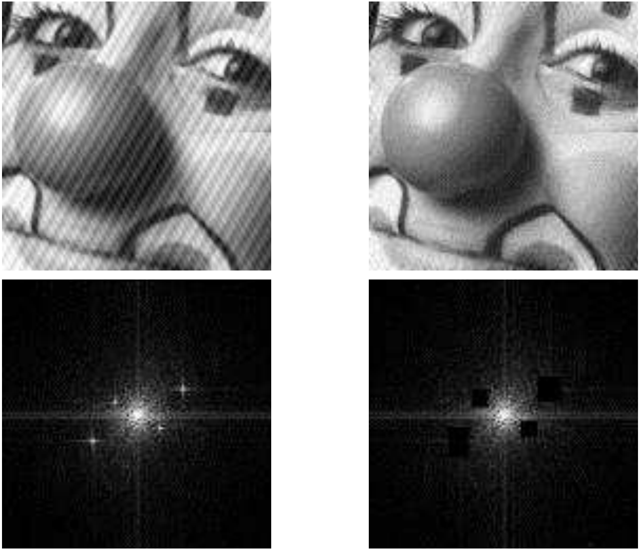



Abbildung: Der Aliasing Effekt

# Denoising

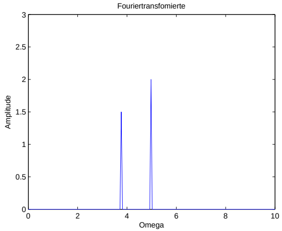

Amplitude
Time (s)
Amplitude bin da
Frequency (Hz)
Amplitude
Time (s)
Amplitude
Frequency (Hz)
Amplitude
Time (s)
Amplitude
Frequency (Hz)

# Denoising



# mögliche Prüfungsfragen

- Hier im Bild ist die Fouriertransformierte abgebildet. Wie könnte die zugehörige Funktion aussehen:




- Können Sie den Begriff *Aliasing* erklären.