9 Numerische Integration

Seit dem Altertum beschäftigt sich die Mathematik mit der Berechnung des Inhalts krummlinig berandeter Flächen. Solche Aufgaben erfordern – in heutiger Sprechweise – die Auswertung bestimmter Integrale.

Die *Quadratur des Kreises* ist mit Zirkel und Lineal, den Werkzeugen der antiken Geometer, undurchführbar. Der Begriff „Quadratur“ als Synonym für numerische Flächen- oder Integralberechnug ist geblieben. Numerischen Integration heißt also auch *numerische Quadratur*; die dazu geeigneten Formeln heißen *Quadraturformeln* (engl.: *quadrature formulas*).

Die analytisch integrierbaren Funktionen mit elementaren Stammfunktionen lassen sich auf wenigen Seiten einer Formelsammlung auflisten. Darüber hinaus können Integrale nur näherungsweise numerisch berechnet werden. (Ausnahme: wenn ein Integral oft genug auftritt, wird es kurzerhand als eigene Funktion *definiert*, tabelliert, und man findet spezielle Näherungsformeln und Reihenentwicklungen zur Auswertung.) Beispiele: Das Fehlerintegral $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$, die Bogenlänge einer Ellipse, die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels bei großen Amplituden. . . . Auch wenn eine Funktion nicht als formelmäßiger Ausdruck, sondern als Tabelle oder Resultat eines Rechenprogrammes gegeben ist, kommt numerische Integration zum Einsatz.

9.1 Die Integrationsformeln von Newton-Cotes-Typ

Newton-Cotes-Formeln

Gegeben: Eine Funktion $f(x)$ in einem Intervall (a,b) durch ihre Werte f_i an $n+1$ äquidistanten Stützstellen,

$$f_i = f(a+ih), \quad \text{mit } h = \frac{b-a}{n}, \quad i = 0,\dots,n.$$

Gesucht: Ein Näherungswert für das Integral $\int_a^b f(x)dx$.
Prinzip: Interpoliere $f(x)$ durch ein Polynom $p(x)$. Nähere das Integral von f durch das Integral von p. Die Näherung ist gegeben als gewichtete Summe der f_i,

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} \alpha_i f_i$$

mit fixen Gewichten α_i

Beispiele: Trapezregel

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\,(f(a)+f(b))$$

Quadratische Interpolation (Lokal: „Keplersche Fassregel“, international: „Simpson-Regel“)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\right)$$

Diese Näherungsformel unter Verwendung von Funktionswerten an drei äquidistanten Stützstellen ist Johannes Kepler eingefallen, als er 1612 in Linz beim Kauf einiger Fässer Wein über deren Rauminhalt nachdachte (wieviel er dabei gekostet hat, ist nicht überliefert).

Die Trapezregel liefert natürlich für lineare Funktionen exakte Werte. Die Keplersche Fassregel ist logischerweise für Parabeln, aber sogar noch für Polynome dritten Grades exakt. Die Fehler lassen sich durch Taylorreihenentwicklung abschätzen und hängen von den höheren Ableitungen der Funktion f ab.

In der Regel benutzt man diese Formeln nicht für das gesamte Intervall $[a, b]$, sondern unterteilt es in eine Reihe kleinerer Intervalle, wendet dort jeweils die Formel an und addiert die Teilergebnisse. Man spricht dabei von *zusammengesetzten* Newton-Cotes-Formeln.

Gegeben: Von einer Funktion $f(x)$ in einem Intervall (a,b) die Werte f_i an $n+1$ äquidistanten Stützstellen,

$$f_i = f(a + ih), \quad \text{mit } h = \frac{b-a}{n}, \quad i = 0, \dots, n.$$

Zusammengesetzte Trapezregel

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n) + E$$

Zusammengesetzte Simpson-Regel

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n) + E$$

Nur für gerades n möglich!

Die Fehlerterme sind

$$E = \frac{a-b}{12} h^2 f''(\xi) \quad \text{für ein } \xi \in [a, b]$$

bei der zusammengesetzten Trapezregel und

$$E = \frac{a-b}{180} h^4 f''''(\xi) \quad \text{für ein } \xi \in [a, b]$$

bei der zusammengesetzten Simpson-Regel