9 Neunte Übungseinheit

Inhalt der neunten Übungseinheit:

- Differentialgleichungen: weitere Beispiele
- Musteraufgaben: Nichtlineare Datenmodelle
- Fourierreihen periodischer Funktionen

Kenntnisnachweis

Den genauen Modus und die Details zur Durchführung des Kenntnisnachweises arbeiten wir noch aus, wir müssen uns dazu nach den aktuellen Vorgaben richten. Diese Übung und die folgende geben Musteraufgaben zu Themenbereiche, aus denen Aufgaben gestellt werden, . Der Kenntnisnachweis wird drei oder vier Teilaufgaben umfassen, eine Aufgabennummer in den Unterlagen hier entspricht etwa einer Teilaufgabe im Kenntnisnachweis.

Kenntnisnachweis-relevante Themenbereiche in dieser Einheit

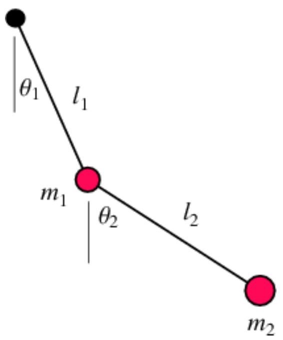
- Gewöhnliche Differentialgleichungen. Die Erfahrungen aus den letzten beiden Übungseinheiten haben gezeigt: viele von Ihnen tun sich immer noch schwer beim Umformen und Lösen gewöhnlicher Differentialgleichungen mit MATLAB. Deswegen hier zur Vertiefung des Lehrstoffes und zur Vorbereitung auf den Kenntnisnachweis weitere Aufgaben.
- Nichtlineare Datenanpassung. Zur Wiederholung und zur Vorbereitung Aufgaben auf Kenntnisnachweis-Niveau.

Fourierreihen

Zum dritten hier behandelten Thema, Fourierreihen, werden bei nahezu jeder Vorlesungsprüfung Fragen gestellt. Allein deswegen sollten Sie sich damit beschäftigen. Natürlich können Sie auch wertvolle Mitarbeits-Punkte in den Übungen sammeln, wenn Sie die entsprechenden Aufgaben bearbeiten.

9.1 Systeme von Differentialgleichungen: weitere Beispiele

Aufgabe 81: Doppelpendel
Ein Doppelpendel besteht aus einem Pendel, an dem ein weiteres Pendel angehängt ist. Es ist ein einfaches Beispiel für ein System mit komplexem dynamischen Verhalten. Bei geringer Auslenkung schwingt es annähernd periodisch, oberhalb einer bestimmten Systemenergie zeigt es chaotisches Verhalten. Die Bewegungsgleichungen für die Auslenkungen θ_1 und θ_2 als Funktionen der Zeit t lauten für kleine Amplituden (in dieser Näherung tritt noch kein chaotisches Verhalten auf):



$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{g}{\ell_1}\left((1+\mu)\theta_1 - \mu\theta_2\right)$$
$$\ddot{\theta}_2 = -\frac{g(1+\mu)}{\ell_2}\left(\theta_2 - \theta_1\right)$$

(a) Wählen Sie $\ell_1 = \ell_2 = 1$, $\mu = 1/10$ ($\mu = m_2/m_1$, Masseverhältnis), $g = 10$. Lenken Sie zu Beginn nur das untere der beiden Pendel aus seiner Ruhelage aus, also

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 1, \quad \dot{\theta}_1 = 0, \quad \dot{\theta}_2 = 0 \text{ für } t = 0,$$

Lösen Sie für $0 \leq t \leq 50$.

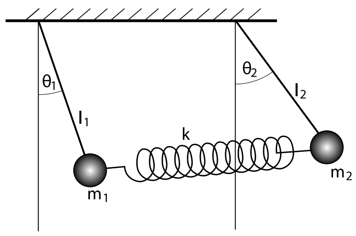
(b) Stellen Sie die Amplituden θ_1, θ_2 als Funktionsgraphen in Abhängigkeit von t dar.

(c) Bestimmen Sie aus den numerischen Daten und prüfen Sie in der Grafik nach: Welchen Maximalwert erreicht θ_1, und zu welcher Zeit tritt dies ein?

Aufgabe 82: Gekoppelte Pendel

Zwei Pendel, zwischen denen ein Energieaustausch stattfinden kann (beispielsweise durch eine Schraubenfeder), werden als *gekoppelte Pendel* bezeichnet.

Die Bewegungsgleichungen für die Winkelauslenkungen $\theta_1 = \theta_1(t)$ und $\theta_2 = \theta_2(t)$ lauten:



$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{g}{\ell}\theta_1 + \frac{k}{m}(\theta_2 - \theta_1)$$
$$\ddot{\theta}_2 = -\frac{g}{\ell}\theta_2 - \frac{k}{m}(\theta_2 - \theta_1)$$

(a) Wählen Sie $\ell = 1, m = 1, g = 10, k = \frac{1}{2}$ und lösen Sie für $0 \leq t \leq 50$ mit den Anfangsbedingungen

$$\theta_1 = 1,\ \theta_2 = 0,\ \dot{\theta}_1 = 0,\ \dot{\theta}_2 = 0 \text{ für } t = 0.$$

(b) Stellen Sie die Auslenkungen $\theta_1 = \theta_1(t), \theta_2 = \theta_2(t)$ als Funktionsgraphen dar.

(c) Lesen Sie aus der Graphik ab: Wann etwa ($\approx$ sekundengenau) ist das erste Pendel fast in Ruhe, während das zweite Pendel mit maximaler Amplitude schwingt?

(d) Verwenden Sie MATLABs `max`-Befehl und finden Sie im Ergebnisvektor für das zweite Pendel die maximale Auslenkung und den zugehörigen Zeitpunkt.

Aufgabe 83: Dreikörperproblem
Im Gravitationsfeld von Erde und Mond bewegt sich ein Raumschiff. Die Bewegungsgleichungen sind hier rechts gegeben.

$$\ddot{x} = 2\dot{y} + x - \frac{\mu^*(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x-\mu^*)}{r_2^3}$$
$$\ddot{y} = -2\dot{x} + y - \frac{\mu^* y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3}$$

μ ist das Masseverhältnis im Mond-Erde-System. Die weiteren Größen sind nebenstehend definiert.
Die Lösung $[x(t), y(t)]$ gibt die Position des Raumschiffes in der Bahnebene. Koordinatenursprung im Erdmittelpunkt, x-Achse zeigt immer in Richtung Mond. Längeneinheit ist die Erde-Mond-Entfernung (380 000 km). Zeiteinheit ist ein Mondumlauf (27 Tage). (Der Mond hat also immer Position $[1, 0]$, das Koordinatensystem rotiert gegenüber einem Inertialsystem mit einer Umdrehung pro Zeiteinheit. Die Bewegungsgleichungen im Inertialsystem wären noch komplizierter!)

$$\begin{aligned} \mu &= 1/82.45 \\ \mu^* &= 1-\mu \\ r_1 &= \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2} \\ r_2 &= \sqrt{(x-\mu^*)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

(a) Formen Sie die Bewegungsgleichungen in ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung um und lösen Sie für $0 \le t \le 10$ mit Anfangsbedingungen

$$x = 1.2; \quad y = 0; \quad \dot{x} = 0; \quad \dot{y} = -1 \qquad \text{für } t = 0\ .$$

(b) Stellen Sie die Bahn des Raumschiffs in der xy-Ebene dar.

(c) Die Rechnung startet mit dem Raumschiff genau hinter dem Mond. Zu welcher Zeit T erreicht das Raumschiff erstmals negative x-Werte? (Dann ist es in Erdnähe, und es wäre Zeit für ein Bremsmanöver, wenn die Astronauten nach Hause wollen.)

(d) Ändern Sie die y-Komponente der Anfangsgeschwindigkeit im Prozentbereich und finden Sie durch Probieren jenen Wert (auf $\pm 0.5\%$ genau), für die sich die Umlaufbahn möglichst gut wieder schließt.

Aufgabe 84: Implizites Trapez-Verfahren
Ein Schritt des *impliziten Trapez-Verfahrens* zur numerischen Lösung einer Differentialgleichung $y' = f(x,y)$ lautet

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{2}\left[f\Big(x,y(x)\Big) + f\Big(x+h,y(x+h)\Big)\right]\ .$$

(a) Rechnen Sie für die Differentialgleichung $y' = (1-x)y$ mit Schrittweite $h = 1/2$ ausgehend von der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ einen Näherungswert für $y(3)$.

(b) Wiederholen Sie die Rechnung mit $h = 1/4$ und geben sie auch dafür den Endwert $y(3)$ an.

(c) Der 12-stellig genaue Wert ist $y(3) = 0.223\,130\,160\,148$. Vergleichen Sie die Diskretisierungsfehler aus den Ergebnissen (2a) und (2b). In welchem Verhältnis ϵ_1/ϵ_2 stehen die Fehler? Welche Fehlerordnung p vermuten Sie daher?

Aufgabe 85: *Rocket Science* aus dem vorigen Jahrtausend
In einem NASA Report aus 1969 beschreibt Erwin Fehlberg folgendes Einschritt-Verfahren

$$F(x,y,h) = \frac{1}{512}(k_1 + 510k_2 + k_3) \quad \text{mit}$$

$$k_1 = f(x,y)\ , \quad k_2 = f\Big(x + \frac{h}{2},\, y + \frac{h}{2}k_1\Big)\ , \quad k_3 = f\Big(x + h,\, y + \frac{h}{256}(k_1 + 255k_2)\Big)$$

(a) Implementieren Sie das Verfahren für die Differentialgleichung $y' = \sin(y) + x$ und rechnen Sie mit Schrittweite $h = 1/2$ ausgehend von der Anfangsbedingung $y(1) = -1$ einen Näherungswert für $y(4)$.

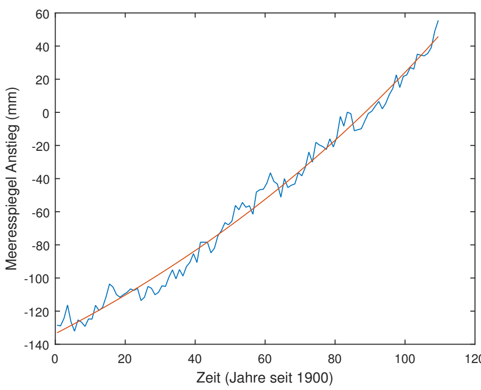
(b) Wiederholen Sie die Rechnung mit $h = 1/4$ und geben sie auch dafür den Endwert $y(4)$ an.

(c) Der (auf 12 Nachkommastellen) genaue Wert ist $y(4) = 5.787\,447\,802\,140$. Vergleichen Sie die Diskretisierungsfehler aus den Ergebnissen (2a) und (2b). In welchem Verhältnis ϵ_1/ϵ_2 stehen die Fehler? Welche Fehlerordnung p vermuten Sie daher?

9.2 Nichtlineare Datenanpassung: Beispiele zur Wiederholung

Aufgabe 86: Zur Ablenkung: Noch ein Untergangs-Szenario
Die nebenstehende Grafik zeigt Daten zum globalen Anstieg des Meeresspiegels. (Zeit in Jahren seit 1900, Höhenänderung Δh in mm. Der Datensatz lässt sich unter `KNW_2.dat` von der Übungshomepage laden.)
Erstellen Sie Modelle für den Datensatz:

1. Linear: $\Delta h = a + bt$
2. Nichtlinear $\Delta h = a + b\exp(ct)$



Für das exponentielle Modell braucht das Gauß-Newton-Verfahren Startwerte. Verwenden Sie $a = -300$; $b = 100$; $c = 0.01$ Stellen Sie die Datenpunkte und die zwei Modelle in einer Grafik dar.
Aus dieser Grafik sollte sich die Antworten auf folgende Fragen ablesen lassen:

a) Ab $\Delta h = 150\,\text{mm}$ bekommen auf dem Markusplatz in Venedig Tauben und Touristen nasse Füße. Wann passiert das, je nach Modell?
b) Der an der Atlantikküste gelegene US-Bundesstaat North Carolina hat per Gesetz 2011 dem Meeresspiegels verboten, mehr als linear anzusteigen:

> *Rates of sea-level rise may be extrapolated linearly but shall not include scenarios of accelerated rates of sea-level rise.*

Für den Fall, dass der Meeresspiegel sich nicht daran hält: Wie groß ist der Unterschied zwischen linearem und nichtlinearem Modell am Ende des 21. Jahrhunderts?[25]

[25] Fairer Weise muss man dazu sagen: North Carolina hat diesen Gesetzestext inzwischen revidiert und erlaubt – unter strengen Auflagen – doch zunehmende Anstiegsrate.

Aufgabe 87: Arrhenius-Gleichung

Das Technische Merkblatt zum Zweikomponentenkleber UHU PLUS ENDFEST 300 gibt nebenstehende Werte für die Aushärtezeit in Abhängigkeit von der Temperatur an.

Als mögliches Modell beschreibt die Arrhenius-Gleichung die Abhängigkeit der Reaktionsgeschwindigkeit von der Temperatur:

$$t_{\text{react}} = a \exp(b/T)$$

Bestimmen Sie die Parameter a und b ausgehend von den Startwerten $a^{(0)} = 2 \times 10^{-5}$ und $b^{(0)} = 5 \times 10^3$. (Zwei Gauß-Newton-Iterationen reichen.)

Temperatur T (K)	Aushärtezeit t_{react} (min)
313	180
343	45
353	30
363	20
373	10
393	7
413	6

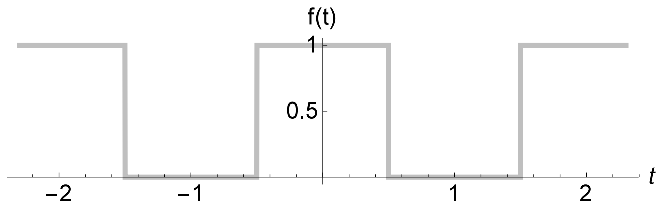
Versuchen Sie auch ein Modell der Form

$$t_{\text{react}} = a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + a_3 T^3$$

Zeichnen Sie Datenpunkte und Anpassungsfunktionen. Wie groß ist jeweils der Fehler bei $T = 373\,\text{K}$, und welche Aushärtezeit sagen die Modelle für Raumtemperatur (20 °C) voraus?

9.3 Approximation periodischer Funktionen durch Fourierreihen

Gegeben ist ein periodisches Signal $f(t)$ in Form einer Rechtecks-Kurve mit Periode $T = 2$. Für $-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$ ist $f(t) = 1$, für $\frac{1}{2} < t < \frac{3}{2}$ ist $f(t) = 0$.



Approximieren Sie diese Funktion durch Fourierreihen Termen bis zur Ordnung 1, 5 und 55.

Anleitung:

Fourierreihenentwicklung einer periodischen Funktion $f(t)$ mit Periode T:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\frac{2\pi}{T} t) + a_2 \cos(\frac{2\pi}{T} 2t) + \cdots + a_n \cos(\frac{2\pi n}{T} t) + \cdots$$
$$+ b_1 \sin(\frac{2\pi}{T} t) + b_2 \sin(\frac{2\pi}{T} 2t) + \cdots + b_n \sin(\frac{2\pi n}{T} t) + \cdots$$

mit

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \cos(\frac{2\pi n}{T} t)\,\mathrm{d}t \qquad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \sin(\frac{2\pi n}{T} t)\,\mathrm{d}t$$

Im Beispiel hier ist $T = 2$. Die Funktion f ist aber nur im Bereich $-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$ ungleich 0 und dort sogar konstant mit Wert $f(t) = 1$. Das vereinfacht die Berechnung der Integrale ganz wesentlich:

- Die Interation läuft nicht von $-T/2$ bis $T/2$, sondern nur dort wo $f \neq 0$, also im Intervall $-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$.
- Beachten Sie: dieses Signal ist symmetrisch bezüglich der y-Achse! Weil $\sin(a) = -\sin(-a)$, heben sich bei der Integration von (Signal mal Sinus-Term) die Beiträge der positiven und der negativen t-Werte auf, alle b_n-Koeffizienten sind hier gleich 0.

Es bleibt also zu berechnen:

$$a_n = \int_{-1/2}^{1/2} 1 \cdot \cos(n\pi t)\, dt$$

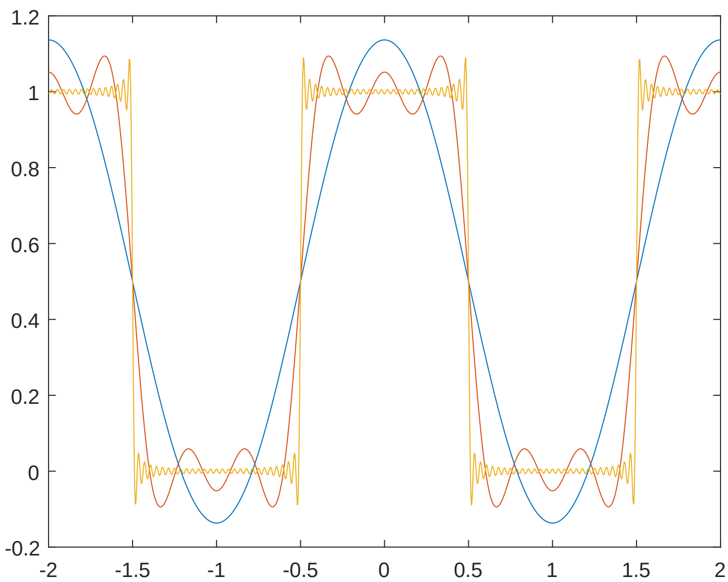
Ergebnis:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_n &= (-1)^{(n-1)/2} \cdot \frac{2}{n\pi} && \text{für } n > 0 \text{ ungerade} \\ a_n &= 0 && \text{für } n > 0 \text{ gerade} \end{aligned}$$

Die Fourierreihe lautet somit

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\cos(\pi t) - \frac{1}{3}\cos(3\pi t) + \frac{1}{5}\cos(5\pi t) - \frac{1}{7}\cos(7\pi t) \pm \cdots\right)$$

Und so sehen die Approximationen bis $n = 1, 5, 55$ aus:



Sie können versuchen, noch viel mehr Terme zu summieren, damit die Approximation genauer wird. Aber ganz egal, wie viele Terme Sie summieren:

Gibbs'sches Phänomen: Bei Approximation unstetiger Funktionen durch Fourier-Summen treten in der Umgebung von Sprungstellen Überschwingungen auf. Diese überschießenden Zacken werden mit zunehmendem n schmäler, die maximalen Auslenkung bleit aber konstant im Bereich $\approx 10\,\%$ der Sprunghöhe.

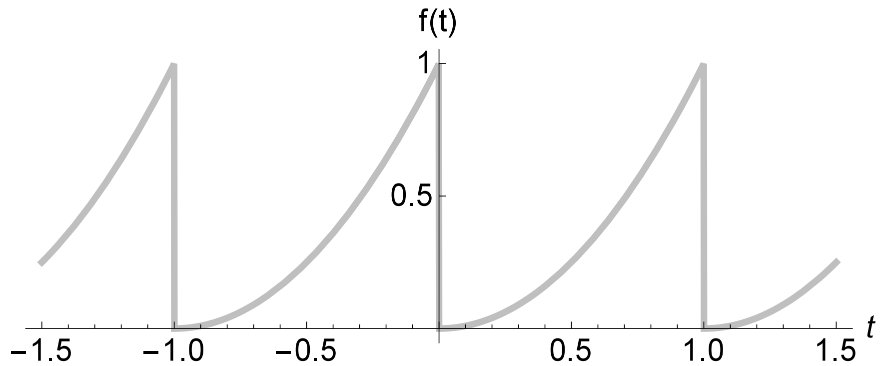
Aufgabe 88: Rechtecks-Funktion und Gibbs-Phänomen
Gegeben ist ein periodisches Rechtecks-Signal wie oben, nur mit schmäleren Rechtecken: Periode $T = 2$ wie vorher, aber nur für $-\frac{1}{4} < t < \frac{1}{4}$ ist $f(t) = 1$, sonst ist $f(t) = 0$.

Berechnen Sie die Terme der Fourierreihe (Nehmen Sie MATLABs symbolische Integration zu Hilfe, wenn Sie die Integrale mit Papier, Stift und Hirn alleine nicht auswerten können!)

Zeichnen Sie die Approximationen bis $n = 1$, 5, 55 und vergleichen Sie mit der obigen Abbildung.

Die Approximationen zeigen das Gibbs-Phänomen. Lesen Sie aus der Grafik die maximale Höhe ab. Bessert sich dieser Wert, wenn Sie n weiter erhöhen? (Wählen Sie n so hoch, wie sie wollen oder MATLAB vernünftig rechnen kann.)

Aufgabe 89: Schräge Säge
Das ist ein Beispiel zum allgemeinen Fall, in dem sowohl Sinus- als auch Cosinus-Terme auftreten. Gegeben ist die Funktion $y = t^2$ für $0 \leq t \leq 1$, periodisch fortgesetzt außerhalb dieses t-Intervalls.



Berechnen Sie bis $n = 5$ die Koeffizienten der Fourierreihe. Stellen Sie y und die Fourier-Approximation dar.

Sie können MATLABs symbolische Integration verwenden, zum Beispiel

```
>> int((1-t^2)*cos(3*pi*t),t,0,1)
 ans =
 2/(9*pi^2)
```

Zeichnen Sie auch Approximationen mit höherem n und erklären Sie den Begriff „Gibbs'sches Phänomen“ anhand der Darstellungen.

Aufgabe 90: Leistung, quadratischer Mittelwert
Gegeben ist noch einmal das Rechtecks-Signal $f(t)$ mit Periode $T = 2$. Für $-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$ ist $f(t) = 1$, für $\frac{1}{2} < t < \frac{3}{2}$ ist $f(t) = 0$.

In vielen Anwendungen gibt der *quadratische Mittelwert*

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)^2 \,\mathrm{d}t$$

die Leistung oder Energie an.

Berechnen Sie diesen Wert für das Rechtecks-Signal.

Die Fourierreihe dieser Funktion ist oben angegeben. Summieren Sie die Quadrate aller Fourier-Koeffizienten bis bis $n = 1,\ 5,\ 55$ gemäß folgender Formel (Achtung, der Koeffizient a_0 ist in den Fourier-Formeln immer ein Sonderfall, er stiftet regelmäßig Verwirrung!).

$$P = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n>1} a_n^2 + b_n^2$$

Was fällt Ihnen im Vergleich zum vorher berechneten Integral auf?

In der Physik und den Ingenieurwissenschaften wird dieser Zusammenhang so formuliert: Die Energie eines Signals im Zeitbereich (Integral über f^2) ist (bis auf Skalierung) gleich seiner Energie im Frequenzbereich. Jede Frequenz > 0 trägt $\frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)$ zur Gesamtenergie bei. Bei komplexer Schreibweise wäre dieser Zusammenhang einfacher, weil dort der Koeffizient zu $n = 0$ kein Sonderfall ist.

Wie groß ist bei der Rechtecks-Funktion der Beitrag der niedrigsten drei Frequenzen (der ersten drei Terme $\neq 0$ in der Fourierreihe) im Verhältnis zur Gesamtenergie?