Formelsammlung zur schriftlichen Prüfung

Hier sind jene Formeln aufgelistet, die schwer zu merken sind und bei denen der Gewinn an Verständnis den Aufwand fürs Auswendiglernen nicht rechtfertigt. Das ist also keine Zusammenfassung zum Vorlesungsstoff. Definitionen und Bedeutungen der Symbole im Kontext müssen Sie wissen. Auch nützen diese Formeln nicht viel, wenn Sie die dahinterstehenden Rechenverfahren nicht verstehen.

1 Lösen von Gleichungen

Sekantenmethode, Regula Falsi

Neuer Näherungswert $x^{(k+1)}$ bei der Sekantenmethode

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - f(x^{(k)}) \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}$$

Regula Falsi verwendet gleiche Rechenvorschrift, wählt aber Werte so, dass Nullstelle immer eingeschlossen bleibt.

Newton-Verfahren

Iterationsvorschrift für Systeme $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}^{(k)} \quad \text{mit} \quad \Delta\mathbf{x}^{(k)} \quad \text{als Lösung von} \quad D_f(\mathbf{x}^{(k)})\Delta\mathbf{x}^{(k)} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})$$

Iterative Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

Jacobi-Verfahren salopp: Löse jede Gleichung nach ihrem Diagonal-Term auf, setze Startwerte ein, iteriere. Am Beispiel eines 3×3-Systems:

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)})/a_{11} \\
x_2^{(k+1)} &= (b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)})/a_{22} \\
x_3^{(k+1)} &= (b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)})/a_{33}
\end{aligned}$$

Gauß-Seidel-Verfahren salopp: Löse jede Gleichung nach ihrem Diagonal-Term auf, setze Startwerte ein, iteriere und verwende dabei die jeweils aktuellsten Näherungswerte.

2 Interpolation

Lagrangesche Interpolationsformel

Das Interpolationspolynom durch die $n + 1$ Wertepaare $(x_i, y_i), i = 0, \ldots, n$ ist gegeben durch

$$p(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + \ldots + L_n(x)y_n,$$

wobei

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}$$

Das Verfahren von Neville

$$P_{i(i+1)...(i+m)} = \frac{1}{x_{i+m}-x_i} \begin{vmatrix} x-x_i & P_{i(i+1)...(i+m-1)} \\ x-x_{i+m} & P_{(i+1)(i+2)...(i+m)} \end{vmatrix}$$

$$P_{123} = \frac{1}{x_3-x_1} \begin{vmatrix} x-x_1 & P_{12} \\ x-x_3 & P_{23} \end{vmatrix} = \frac{(x-x_1)P_{23}-(x-x_3)P_{12}}{x_3-x_1}$$

Dividierte Differenzen, Newtonsche Interpolationsformel

Die erste dividierte Differenz zwischen x_0 und x_1 ist

$$[x_0,x_1] = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$$

und allgemein ist für $k > i$

$$[x_i,x_{i+1},...,x_{k+1}] = \frac{[x_{i+1},...,x_{k+1}]-[x_i,...,x_k]}{x_{k+1}-x_i}$$

Dann hat $p(x)$ folgende Darstellung

$$\begin{aligned} p(x) = y_0 \quad + & \quad (x-x_0)[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)[x_0,x_1,x_2] + \\ ... & \quad +(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})[x_0,x_1,...,x_n] \end{aligned}$$

3 Numerische Integration

Integrationsformeln von Newton-Cotes-Typ

Trapezregel

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\,(f(a)+f(b))$$

Simpson-Regel

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\right)$$

3/8-Regel

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{8}\,(f(a)+3f(a+h)+3f(a+2h)+f(b))$$

Zusammangesetzte Newton-Cotes-Formeln

Äquidistante Stützstellen f_0 bis f_n im Abstand $h = \frac{b-a}{n}$
Zusammengesetzte Trapezregel

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f_0+2f_1+2f_2+\cdots+2f_{n-1}+f_n)$$

Zusammengesetzte Simpson-Regel

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

4 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Seien $x_0 \in \mathbb{R}$ und $y_0 \in \mathbb{R}^d$. Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\begin{cases} y'(x) &= f(x,y(x)), \\ y(x_0) &= y_0. \end{cases}$$

Einschrittverfahren

Wähle Schrittweite h und maximale Schrittzahl N;
setze x_0 und y_0 laut Anfangsbedingung;
für $i = 0,1,\ldots,N$
  $x_{i+1} = x_i + h$;
  $y_{i+1} = y_i + hF(x_i,y_i,h)$.

Dabei bedeutet $F(x,y,h)$

- beim *(expliziten) Euler-Verfahren*

$$F(x,y,h) = f(x,y),$$

- beim *modifizierten Euler-Verfahren*

$$F(x,y,h) = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f(x,y)\right),$$

- beim *Verfahren 2. Ordnung von Heun*

$$F(x,y,h) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

  mit

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x,y) \\ k_2 &= f(x+h,y+hf(x,y)), \end{aligned}$$

- und beim *impliziten Euler Verfahren*

$$F(x,y,h) = f\left(x+h, y(x+h)\right).$$

Runge-Kutta-Verfahren

Die obigen Einschrittverfahren sind Spezialfälle aus der Familie der Runge-Kutta-Verfahren. Die s-stufigen Runge-Kutta-Verfahren sind gegeben durch

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{s} b_i k_i,$$

mit Zwischenschritten k_i, die f an bestimmten Stellen auswerten. Weitere Beispiele sind

- Das Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 3

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n) & b_1 &= \frac{1}{6} \\ k_2 &= f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1) & b_2 &= \frac{4}{6} \\ k_3 &= f(t_n + h, y_n - hk_1 + 2hk_2) & b_3 &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

- Das klassische Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 4

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n) & b_1 &= \frac{1}{6} \\ k_2 &= f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1) & b_2 &= \frac{1}{3} \\ k_3 &= f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2) & b_3 &= \frac{1}{3} \\ k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_3) & b_4 &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Fourierreihe einer Funktion $f(t)$ mit Periode T und Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\,\omega t) + b_n \sin(n\,\omega t)$$

mit

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cdot\cos(n\,\omega t)\,\mathrm{d}t \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cdot\sin(n\,\omega t)\,\mathrm{d}t$$

(Es kommt bei den Integralen nur darauf an, über eine volle Periode zu integrieren; ob von $-T/2$ bis $T/2$, von 0 bis T oder über irgend einen anderen Bereich, der eine volle Periode abdeckt, ist egal. Daher sind hier die Grenzen beginnend mit irgendeinem t_0 bis $t_0 + T$ angegeben.)