

Fourier-Analysis II.

11. Vorlesung

170 004 Numerische Methoden I

Clemens Brand und Erika Hausenblas

Montanuniversität Leoben

2. Juni 2022

Fourier-Analysis II

① Fourierreihe, Basisfunktionen, FFT (Nachtrag 10. Vorlesung)

Wichtige Eigenschaften: Orthogonalität, Norm

Basisvektoren, Basisfunktionen

Diskrete Fourierreihe, FFT

Basisvektoren

Frequenzanalyse

② Fourieranalyse, weitere Themen

Aliasing

Gibbs'sches Phänomen

Filtern, Decoising

Einige Prüfungsfragen

Gliederung 11. Vorlesung

① Fourierreihe, Basisfunktionen, FFT (Nachtrag 10. Vorlesung)

Wichtige Eigenschaften: Orthogonalität, Norm

Basisvektoren, Basisfunktionen

Diskrete Fourierreihe, FFT

Basisvektoren

Frequenzanalyse

② Fourieranalyse, weitere Themen

Aliasing

Gibbs'sches Phänomen

Filtern, Decoisung

Einige Prüfungsfragen

Fourierreihe, Basisfunktionen, FFT (Nachtrag 10. Vorlesung)

Siehe 10. Vorlesung! (Die Folien wurden leicht ergänzt)

Gliederung 11. Vorlesung

① Fourierreihe, Basisfunktionen, FFT (Nachtrag 10. Vorlesung)

Wichtige Eigenschaften: Orthogonalität, Norm

Basisvektoren, Basisfunktionen

Diskrete Fourierreihe, FFT

Basisvektoren

Frequenzanalyse

② Fourieranalyse, weitere Themen

Aliasing

Gibbs'sches Phänomen

Filtern, Decoising

Einige Prüfungsfragen

Aliasing

Aliasing:

Als Aliasing-Effekte oder kurz Aliasing werden im Bereich der Signalanalyse Fehler bezeichnet, die auftreten, wenn im abzutastenden Signal Frequenzanteile vorkommen, die höher als die halbe Abtastfrequenz sind, oder, mit anderen Worten, ein Signal in zu großen Abständen abgetastet wurde.

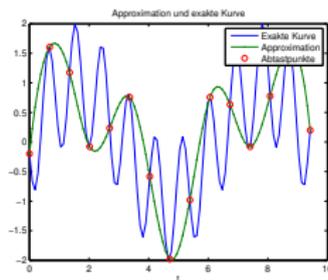
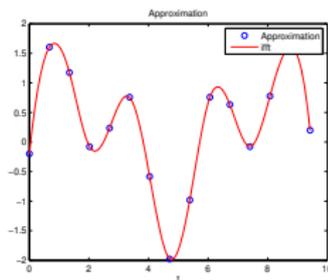
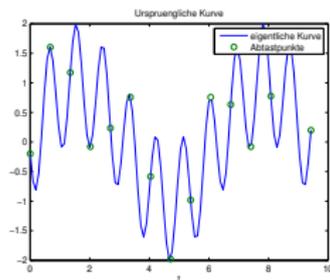
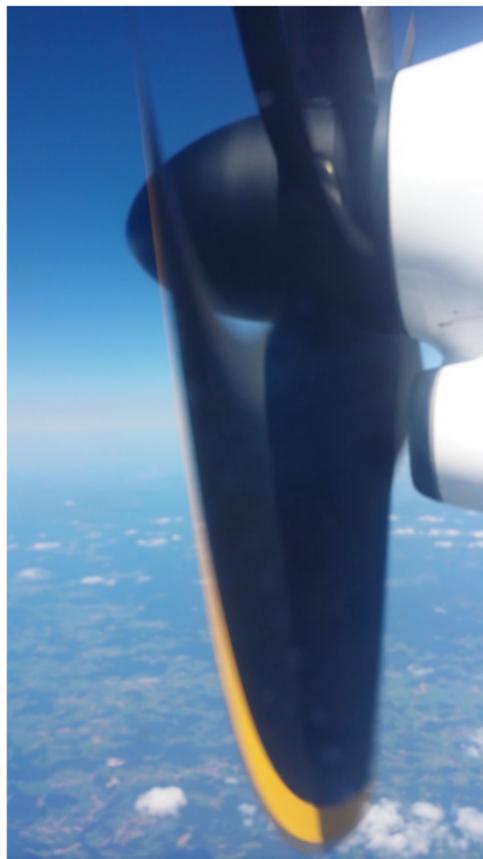


Abbildung: Der Aliasing Effekt

Aliasing über den Wolken

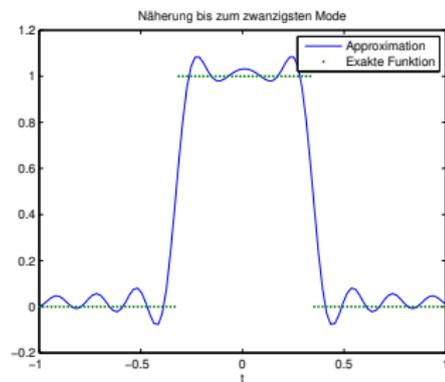
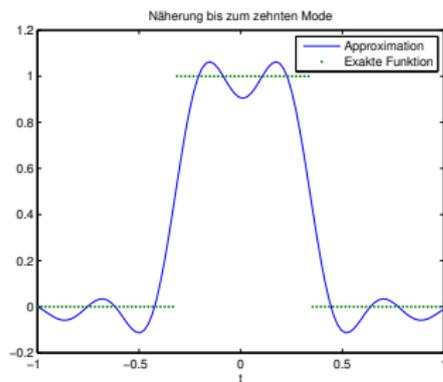
Auf dem Video `propeller.mp4` dreht sich der Propeller scheinbar recht langsam. Wenn Sie genau hinsehen und auf den Anstellwinkel der Propellerblätter achten, dreht er sich sogar rückwärts! Keine Panik, das sind Aliasing-Effekte. Die tatsächliche Propellerdrehzahl können Sie aus dem Betriebsgeräusch durch Fourieranalyse ermitteln.

Demodatei `FourierFlugzeug.m`



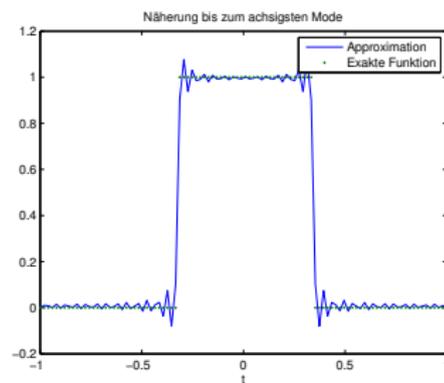
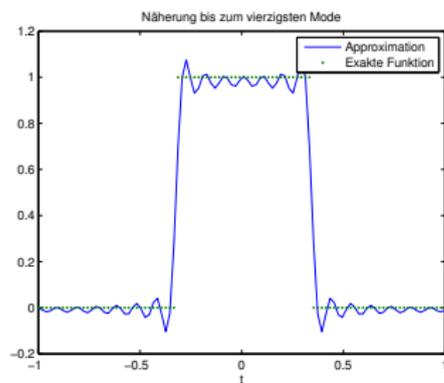
Gibbs'sches Phänomen

Hier soll eine Rechtecksfunktion als Fourierreihe dargestellt werden:



Gibbs'sches Phänomen

Mehr Terme bringen schon eine bessere Näherung, aber...



Gibbs'sches Phänomen

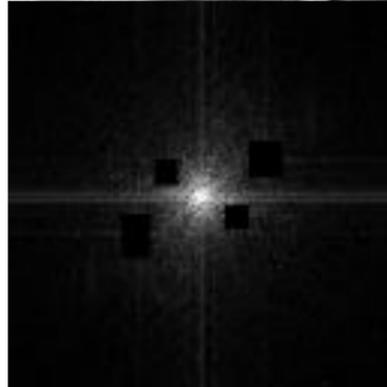
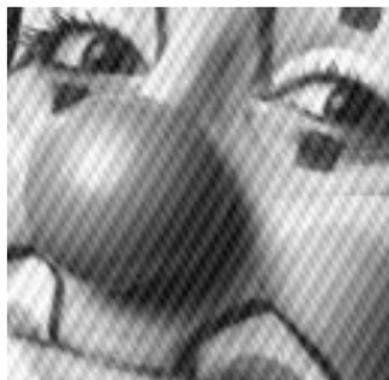
Kann bei Fourierreihen auftreten, wenn nur endlich viele Terme summiert werden

Bei Sprungstellen einer Funktion treten Überschwingungen auf

- ▶ Je mehr Terme einer Fourierreihe von f summiert werden, desto schmaler und schärfer begrenzt in der Umgebung der Sprungstelle.
- ▶ Die maximale Abweichung erreicht auch für $n \rightarrow \infty$ etwa 10% der Sprunghöhe. (Keine Konvergenz in der ∞ -Norm.)
- ▶ Die quadrierten Flächeninhalte der Abweichung konvergieren nach 0 für $n \rightarrow \infty$ (Konvergenz im Quadratischen Mittel, in der 2-Norm)
- ▶ Der Bereich mit den Abweichungen wird aber für $n \rightarrow \infty$ beliebig schmal: punktweise Konvergenz.

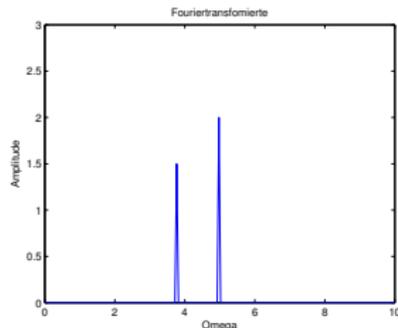
Filtern, Denoising

Anwendung der FFT. Siehe auch Übungsbeispiele 95, 96



Prüfungsfragen

- ▶ Die Fourierreihe einer Funktion zeigt im Spektrogramm nur zwei scharf begrenzte Spitzen, so wie hier dargestellt. Wie könnte die zugehörige Funktion aussehen? (Funktionsterm und Skizze!)



- ▶ Weitere Fragen: Siehe Test im Moodle-Kurs!