Beispiele zu FFT und invesen Problemen

12. Vorlesung
170 004 Numerische Methoden I

Clemens Brand und Erika Hausenblas

Montanuniversität Leoben

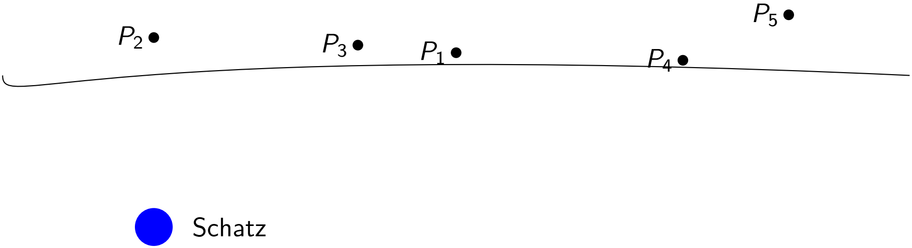
9. Juni 2022

Siehe dazu das Zusatmaterial im Moodle-Kurs!

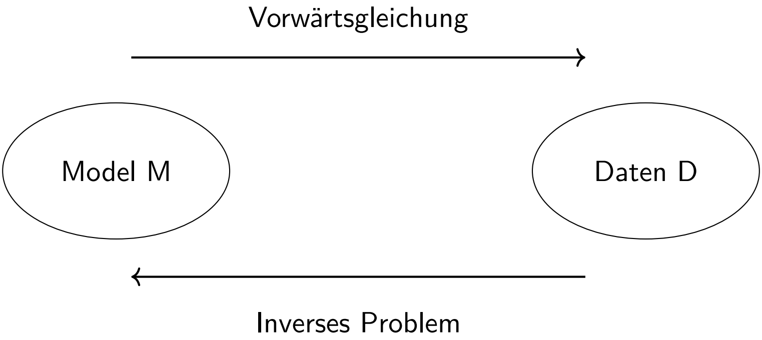
Was ist ein inverses Problem?

- MRT,
- Seismische Tomographie,
- Erkennung von Erdbeben,
- Erschliessung von neuen Ölfeldern,
- Graviatometri
- ...

Gravimetrie - Schatzsuche



Was ist ein inverses Problem



Deblurring

Szenario:

Eine Kamera nimmt durch eine Flüssigkeit ein Bild auf, dadurch ist dieses Bild verschwommen und auch wegen Meßfehler verrauscht.

original

verschwommen

verschwommen mit rauschen

rekonstruktion

Deblurring

Szenario:

Eine Kamera bewegt sich von links nach rechts und nimmt in dieser Zeit ein Bild auf. Die Aufgabe ist von der Aufnahme das eigentliche Bild herauszufiltern.

Mathematische Beschreibung:

Das Bild is als Pixel-Matrix D gegeben, und wird 'gefiltert', d.h.

$$G = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Deblurring

Szenario:

Eine Kamera bewegt sich von links nach rechts und nimmt in dieser Zeit ein Bild auf. Die Aufgabe ist von der Aufnahme das eigentliche Bild herauszufiltern.

Mathematische Beschreibung:

Das Bild is als Pixel-Matrix D gegeben, und wird 'gefiltert', d.h.

$$G = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Deblurring

Vorsicht:

Folgender Vektor wird auf den Null Vektor projeziert:

$$m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & \dots \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ die Lösung wird nicht eindeutig sein, da oszillierende Vektoren auf Null abgebildet werden! In unseren Fall gibt es zwei Vektoren die auf den Null vektor abgebildet werden.

Deblurring

Lösung:

Mit Hilfe der SIngulärwert Zerlegung und Regularisierung kann man das eigentliche Bild rekonstruieren.

Tikohonov Regularisierung

Sei A eine $k \times n$ Matrix. Die Lösung des Problemes $m = Af + \epsilon$ mittels der Tikohonv Regularisierung ist gegeben durch

$$T_\alpha(m) = V\mathcal{D}_\alpha^+ U^T m,$$

wobei UDV^T die Singulärwertzerlegung von A mit Singulärwerten $d_1, d_2, \dots d_n$ ist und

$$\mathcal{D}_\alpha^+ = \operatorname{diag}\left(\frac{d_1}{d_1^2+\alpha}, \frac{d_1}{d_1^2+\alpha}, \dots, \frac{d_{\min(k,n)}}{d_{\min(k,n)}^2+\alpha}\right)$$

ist.

$\Rightarrow$ MATLAB Beispiel Faltung und Diffusionsgleichung

Tikohonov Regularisierung

Sei A eine $k \times n$ Matrix. Die Lösung des Problemes $m = Af + \epsilon$ mittels der Tikohonv Regularisierung ist gegeben durch

$$T_\alpha(m) = V\mathcal{D}_\alpha^+ U^T m,$$

wobei UDV^T die Singulärwertzerlegung von A mit Singulärwerten $d_1, d_2, \dots d_n$ ist und

$$\mathcal{D}_\alpha^+ = \mathrm{diag}\left(\frac{d_1}{d_1^2 + \alpha}, \frac{d_1}{d_1^2 + \alpha}, \dots, \frac{d_{\min(k,n)}}{d_{\min(k,n)}^2 + \alpha}\right)$$

ist.

$\Rightarrow$ MATLAB Beispiel Faltung und Diffusionsgleichung