Eigenwertaufgaben

8. Vorlesung

170.021 Numerische Methoden 1

(170.026 Numerische Methoden I)

Clemens Brand, Erika Hausenblas, Alexander Steinicke

Montanuniversität Leoben

5. Mai 2023

1. Nachträge zu Interpolation und numerischer Integration

2. Eigenwertprobleme
   - Definition: Eigenwerte und Eigenvektoren
   - Anwendungen: Netzwerke, Schwingungen...
   - Eigenwertaufgaben lösen: Methoden

Gliederung 8. Vorlesung

1. Nachträge zu Interpolation und numerischer Integration

2. Eigenwertprobleme
   - Definition: Eigenwerte und Eigenvektoren
   - Anwendungen: Netzwerke, Schwingungen. . .
   - Eigenwertaufgaben lösen: Methoden

Nachträge zu Interpolation und numerischer Integration

Siehe die Folien der 7. Vorlesung!

Gliederung 8. Vorlesung

1. Nachträge zu Interpolation und numerischer Integration

2. Eigenwertprobleme
   - Definition: Eigenwerte und Eigenvektoren
   - Anwendungen: Netzwerke, Schwingungen...
   - Eigenwertaufgaben lösen: Methoden

Eigenwertproblem

Definition: Eigenwerte und Eigenvektoren

Gegeben:

eine $n \times n$-Matrix A

Gesucht:

- ein vom Nullvektor verschiedener Vektor $\mathbf{x}$ und
- ein Skalar λ (auch $\lambda = 0$ ist erlaubt),

welche die Gleichung $\quad A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad$ erfüllen.

Ein solches λ heißt *Eigenwert* von A, ein passendes $\mathbf{x}$ heißt *Eigenvektor* von A zum Eigenwert λ.

Anwendung:

Schwingungen, Hauptträgheitsachsen starrer Körper, Spannungstensor, Stabilitätstheorie, Hauptkomponentenanalyse, Quantenmechanik...

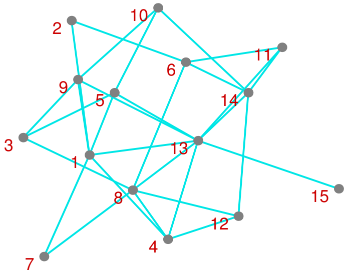
Eigenwerte und Eigenvektoren, anschaulich

Siehe Skriptum, Kapitel 8.1!

- „Der Hauptberuf einer Matrix ist, Vektoren zu multiplizieren!“
- $n \times n$- Matrix beschreibt allgemein lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
- $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$: Matrix, angewandt auf Vektor $\mathbf{x}$, gibt neuen Vektor $\mathbf{y}$. Der zeigt normalerweise in andere Richtung und hat andere Länge.
- Jede $n \times n$-Matrix hat aber ganz spezielle *Eigenvektoren*. Für sie ändert sich bei Multiplikation nur die Länge, aber die Richtung bleibt gleich (oder entgegengesetzt).
- sehen Sie sich die MATLAB-Demo EIGSHOW an (Zusatzmaterial)!

Beispiel: Erreichbarkeit in einem Netzwerk

Ein Netzwerk (Verkehrsverbindungen, verlinkte Seiten im Internet, soziales Netz..., mathematisch: ein Graph) lässt sich durch seine *Adjazenzmatrix* beschreiben



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Welcher Knoten ist am besten erreichbar?

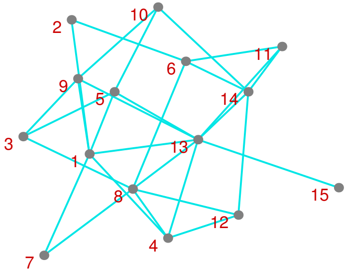
Welcher Knoten ist am besten vernetzt, am wichtigsten...?

(Diese Matrix ist in Datei `Netzwerk.m` abgespeichert)

Beispiel: Erreichbarkeit in einem Netzwerk

Lässt sich als Eigenwertproblem $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ formulieren

Ein Eigenvektor $\mathbf{x}$ zum betragsgrößtem Eigenwert λ liefert Bewertung!



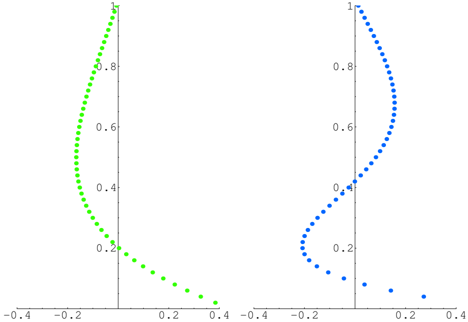
$$x = \begin{bmatrix} 74 \\ 27 \\ 41 \\ 64 \\ 56 \\ 45 \\ 32 \\ 72 \\ 56 \\ 38 \\ 46 \\ 44 \\ 100 \\ 60 \\ 22 \end{bmatrix}$$

(Die Datei `pagerank.mlx` zeigt ein ausführliches Beispiel)

Beispiel: Schwingungen der frei hängenden Kette

Das Eigenwertproblem $A \cdot \mathbf{x} = \frac{\ell\omega^2}{ng}\mathbf{x}$ beschreibt die Schwingungsformen einer (idealisierten) n-gliedrigen freihängenden Kette (Bild: erste und zweite Oberschwingung)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \cdots & 0 \\ -1 & 3 & -2 & & & \vdots \\ & -2 & 5 & -3 & & \\ & & -3 & 7 & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1-n \\ 0 & \cdots & & & 1-n & 2n-1 \end{bmatrix}$$



Schwingungsberechnungen (Saiten, Membrane, Balken, Platten, Schall,. . .) führen typischerweise zu Eigenwertaufgaben.

Beispiel (nochmals): Gesichtserkennung mit *eigenfaces*

Hier sind einige zufällig ausgewählte Gesichter aus einem Datensatz (Yale Face Database)

Siehe 5. Vorlesung. Dort als Anwendung der Singulärwertzerlegung. Das Original-Verfahren verwendet Eigenvektoren. Siehe Zusatzmaterial `eigenfaces.m`

Methoden

- Nullstellen im charakteristische Polynom bestimmen (klassisch, ineffizient bei voller Matrix, gut für Tridiagonalmatrix!)
- Vektoriteration (langsam!)
- QR-Verfahren (Standard)
- Lanczos-Verfahren (Spezial-Verfahren bei schwach besetzter (engl. sparse) Matrix)

MATLAB-Befehle `eig` und `eigs`

Anwendungsbeispiele

`d = eig(A)` liefert Vektor von Eigenwerten

`[V,D] = eig(A)` Spalten von V sind Eigenvektoren, Diagonalelemente von D sind Eigenwerte.

`d = eigs(A), d = eigs(A)` analoge Befehle für schwach besetzte (sparse) Matrizen. Liefern die sechs betragsgrößten Eigenwerte und zugeh. Eigenvektoren.

Wichtige Feststellungen zu $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$

Siehe Skriptum, Kapitel 8.1 und 8.2!

- Eigenwerte sind Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\det(A - \lambda I)$
- Eine $n \times n$-Matrix hat genau n reelle oder komplexe Eigenwerte (bei entsprechender Zählung)
- Eigenwerte symmetrischer Matrizen sind immer reell.
- Ähnlichkeitstransformation: $X^{-1}AX$ und A haben die gleichen Eigenwerte .
- Hauptachsentransformation: Symmetrische Matrizen sind durch orthogonale Transformation diagonalisierbar, $Q^T \cdot A \cdot Q = D$.
- Für symmetrische Matrizen hat die Singulärwertzerlegung die einfachere Form $A = Q \cdot D \cdot Q^T$.

Vektoriteration bestimmt den betragsgrößten Eigenwert

Iterationsverfahren nach Richard von Mises und Hilda Pollaczek-Geiringer

Gegeben eine $n \times n$-Matrix A, ein Startvektor $\mathbf{x}^{(0)} \neq 0$ und ein fix gewähltes $i \in \{1, \ldots, n\}$

Iteriere für $k = 1, 2, \ldots$

berechne $\mathbf{y}^{(k)} = A\mathbf{x}^{(k-1)}$

setze $\lambda^{(k)} = y_i^{(k)}$ *(i-te Komponente von* $\mathbf{y}^{(k)}$*)*

setze $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{y}^{(k)} / \lambda^{(k)}$ *(Skalierung)*

Falls ein reeller Eigenwert betragsmäßig größer ist als alle anderen Eigenwerte und ein zugehöriger Eigenvektor in Komponente i ungleich 0 ist, konvergieren die $\lambda^{(k)}$ und die $\mathbf{x}^{(k)}$.

Varianten dieses Verfahrens verwenden unterschiedliche Skalierungsvorschriften.

Zusatzmaterial `Vektoriteration.m`

Das *QR*-Verfahren

bestimmt alle Eigenwerte einer Matrix A durch eine Folge orthogonaler Transformationen

Iteriere bis zur Konvergenz
berechne QR-Zerlegung $A = Q \cdot R$
setze $A = R \cdot Q$ *(Ähnlichkeitstransform.* $A \rightarrow Q^T \cdot A \cdot Q$*)*

Das Verfahren konvergiert (unter gew. Voraussetzungen und u.U. sehr langsam) zu einer Matrix in oberer Dreiecksform. Deren Hauptdiagonale enthält die Eigenwerte.

Für den praktischen Einsatz wird das Verfahren durch gezielte Verschiebungen der Art $\tilde{A} = A + sI$ beschleunigt.

Zusatzmaterial `QRiteration.m`