Gewöhnliche Differentialgleichungen

9. Vorlesung

170.021 Numerische Methoden 1

(170.026 Numerische Methoden I)

Clemens Brand, Erika Hausenblas, Alexander Steinicke

Montanuniversität Leoben

11. Mai 2023

Gewöhnliche Differentialgleichungen

1. Aufgabenstellung und Interpretation
   - Definition
   - Geometrische Interpretation als Richtungsfeld
2. Numerische Approximation
   - Explizite Einschrittverfahren
   - Diskretisierungsfehler, Fehlerordnung
   - Wichtige Verfahren
   - Mehrschrittverfahren
   - Schrittweiten-Steuerung
3. Implizite Verfahren
   - Vergleich explizit/implizit, Rechengang
   - Steife Systeme, Stabilität

Die Aufgabenstellung

Explizite gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung mit Anfangsbedingung

Gegeben ist eine Gleichung

$$y' = f(x, y)$$

Gesucht ist eine Funktion $y(x)$.

Sie soll erfüllen

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y(x)) && \text{Differentialgleichung} \\ y(x_0) &= y_0 && \text{Anfangsbedingung} \end{aligned}$$

Dabei ist f mit Definitionsmenge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ gegeben: $(x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$. Schlagen Sie in ihren Unterlagen nach: Wenn f in x stetig ist und in y einer Lipschitzbedingung genügt, dann existiert eine eindeutige Lösung in der Umgebung des Anfangspunktes x_0.

Ein paar Beispiele zum Verständnis der Aufgabenstellung

Gegeben ist eine Gleichung $y' = f(x, y)$, gesucht ist eine Funktion y

Schreiben Sie die Differentialgleichung an; welche Lösungen kennen Sie?

1. Ganz leicht:

$$f(x, y) = x$$

2. Leicht:

$$f(x, y) = y$$

3. Mittel:

$$f(x, y) = \frac{1}{4}xy - 1$$

   Kommt als Beispiel in den nächsten Folien

4. Schwer?

$$f(x, y) = x + y^2$$

   Lösung ist keine Funktion, die Ihr Taschenrechner kennt.

Siehe MATLAB-Skript `BeispieleGDG`

Was ist eine Differentialgleichung ?

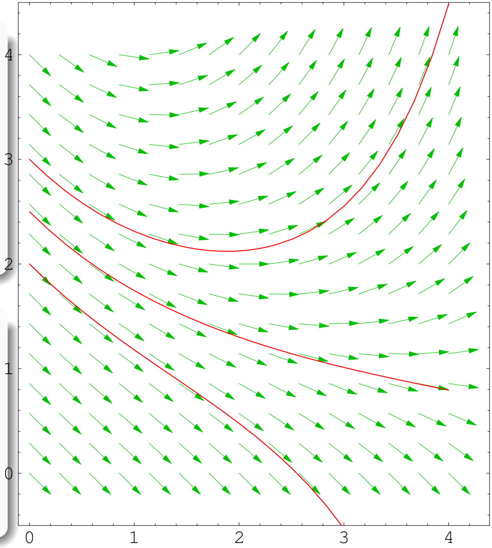
Geometrisch-anschaulich interpretiertes Beispiel

Die Differentialgleichung

$$y' = xy/4 - 1$$

definiert ein Richtungsfeld – Zu jedem Punkt (x, y) gibt sie die Steigung (Richtung) der Lösung

Lösungskurven folgen in jedem Punkt der dort gegebenen Richtung – Drei Lösungen zu verschiedenen Anfangsbedingungen sind eingetragen

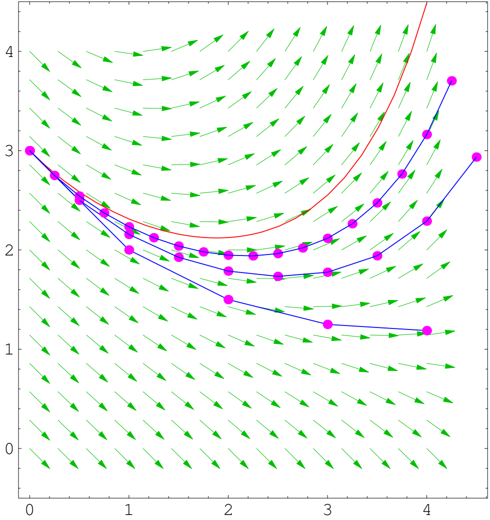


Numerische Approximation – Eulersches Polygonzugverfahren

Für die Differentialgleichung und Anfangsbedingung

$$\begin{aligned} y' &= xy/4 - 1 \\ y(0) &= 3 \end{aligned}$$

sind die exakte Lösung sowie drei Näherungen mit Schrittweiten $h = 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}$ eingetragen.



Aufgabe: Richtungsfeld und Euler-Verfahren

Für die Differentialgleichung

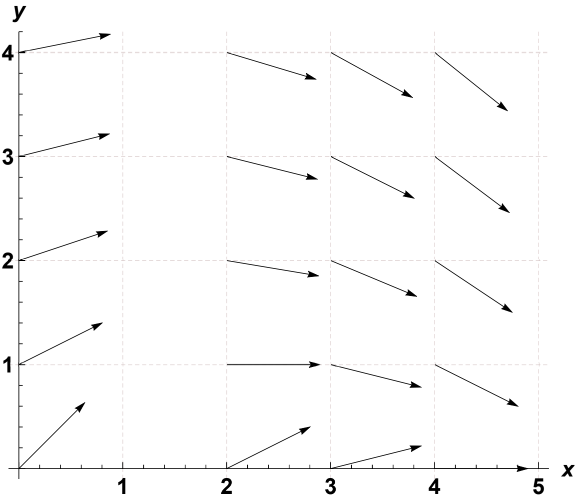
$$y' = \frac{1}{y+1} - \frac{x}{4}$$

zeigt die Abbildung einen Teil des zugehörigen Richtungsfeldes.

Ergänzen Sie das Richtungsfeld an den Punkten $x = 1, y = 0, \ldots, 4$.

Orientieren Sie sich am Richtungsfeld und skizzieren Sie die Lösung zur Anfangsbedingung $y(0) = 2$.

Berechnen Sie mit dem expliziten Euler-Verfahren, Schrittweite $h = 1$, die Näherungslösung zur Anfangsbedingung $y(0) = 2$ für $0 \le x \le 3$



Explizite Einschrittverfahren: Ablaufschema

- Wähle Schrittweite h und Schrittzahl N;
- setze x_0 und y_0 laut Anfangsbedingung;
- berechne für $i = 0, 1, \ldots, N-1$

  $$x_{i+1} = x_i + h\ ;$$
  $$y_{i+1} = y_i + hF(x_i, y_i, h)\ .$$

Die Einschrittverfahren unterscheiden sich in der Wahl der Verfahrensfunktion F – sie bestimmt die Fortschreit-Richtung

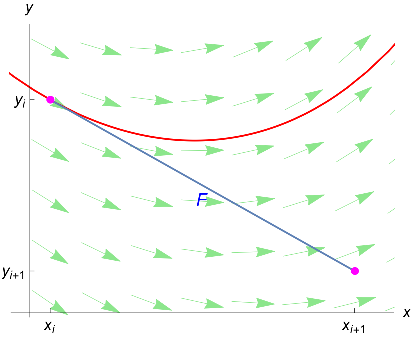
- explizites Euler-Verfahren: $F(x, y, h) = f(x, y)$,
- Modifiziertes Euler-Verfahren: $F(x, y, h) = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(x, y)\right)$
- Heun-Verfahren: $F(x, y, h) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ mit

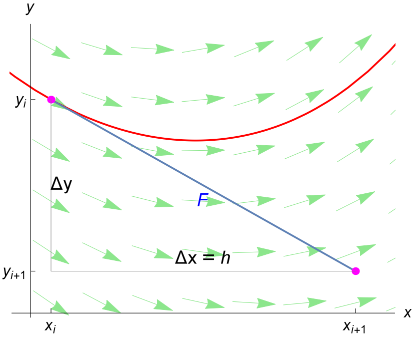
$$k_1 = f(x, y),\ \ k2 = f(x + h, y + hf(x, y))$$

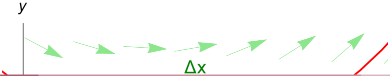
Einschrittverfahren: Verfahrensfunktion $F(x, y, h)$

- F berechnet Richtung von Punkt (x_i, y_i) zu Punkt (x_{i+1}, y_{i+1}).
- F entspricht einem *Differenzenquotienten* $\Delta y/\Delta x$
- F ist nicht das $D = \Delta y/\Delta x$ der exakten Lösung

Beim Euler-Verfahren stimmt F mit der Anfangs-Richtung, der Steigung im Startpunkt, überein: $F(x, y, h) = f(x, y)$



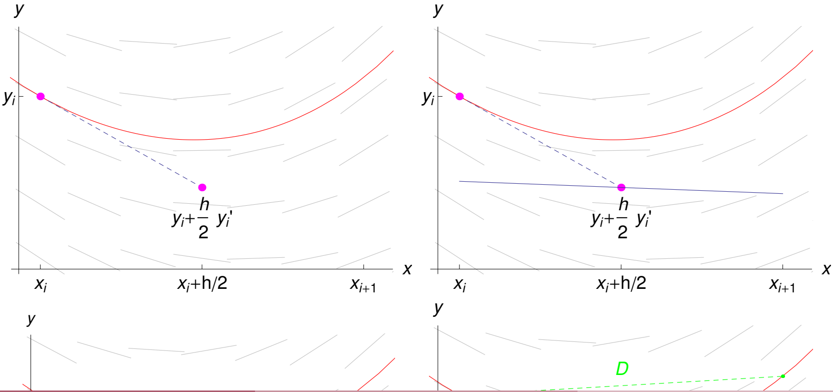




Weitere Verfahrensfuntionen $F(x, y, h)$

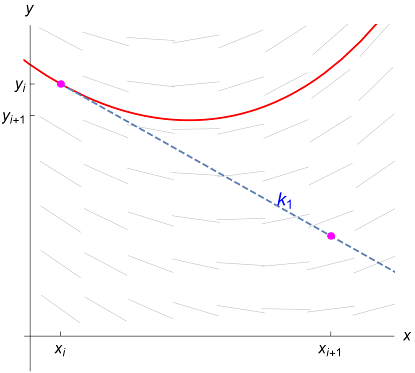
Modifiziertes Eulerverfahren: $F(x,y,h) = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(x,y)\right)$

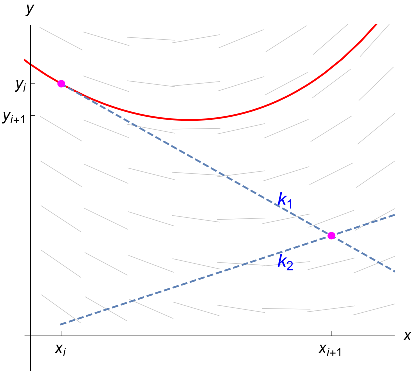
- gehe mit Anfangs-Steigung nur den halben Weg
- werte dort das Richtungsfeld neu aus
- verwende diese „Mittelrichtung“ als F

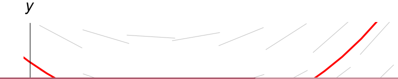


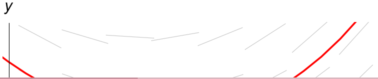
Verfahren von Heun: $F(x, y, h) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$

- gehe mit Anfangs-Steigung $k_1 = f(x, y)$ einen Euler-Schritt
- werte das Richtungsfeld neu aus: $k_2 = f(x + h, y + hf(x, y))$
- verwende Mittelwert $(k_1 + k_2)/2$ als F









Klassisches Runge-Kutta-Verfahren

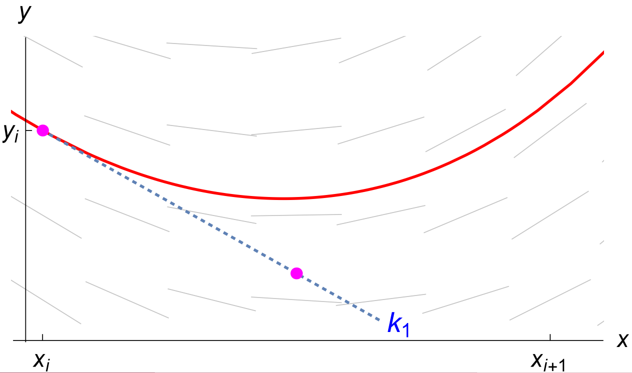
Verfahrensfunktion F ist ein gewichtetes Mittel aus vier Richtungen (Steigungen)

$$F(x, y, h) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

mit

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x, y) \\
k_2 &= f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} k_1\right) \\
k_3 &= f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} k_2\right) \\
k_4 &= f(x + h, y + hk_3).
\end{aligned}$$

- gehe mit Anfangs-Steigung $k_1 = f(x, y)$ eine halbe Schrittweite
- werte das Richtungsfeld neu aus: $k_2 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} k_1\right)$
- gehe noch einmal vom Anfang mit Steigung k_2 eine halbe Schrittweite
- werte das Richtungsfeld neu aus: $k_3 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} k_2\right)$
- gehe noch einmal vom Anfang mit Steigung k_3 eine ganze Schrittweite
- werte das Richtungsfeld neu aus: $k_4 = f(x + h, y + hk_3)$
- endgültiger Schritt mit $F = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

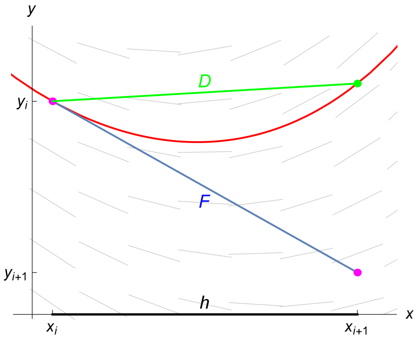


Lokaler Diskretisierungsfehler $d(x, y, h)$

Unterschied zwischen

- Verfahrensfunktion $F = (\Delta y/\Delta x)_{\text{genähert}}$ und
- exaktem Differenzenquotienen $D = (\Delta y/\Delta x)_{\text{exakt}}$

$$d(x, y, h) = F(x, y, h) - D(x, y, h)$$



Hier ist die Verfahrensfunktion des einfachen Euler-Verfahrens dargestellt.

Globaler Diskretisierungsfehler

Ist Y die exakte Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \ ,$$

und y_m die Näherungslösung an der Stelle x_m, so nennt man die Differenz

$$g(x_m, h) = y_m - Y(x_m)$$

den globalen Diskretisierungsfehler.

Ordnung eines Einschrittverfahrens

Der lokale Diskretisierungsfehler $d(x, y, h)$ wird für $h \to 0$ immer kleiner.

Wie rasch?

Die größte natürliche Zahl p mit

$$d(x, y, h) = O(h^p)$$

heißt Ordnung des Verfahrens.

Interpretation

- Ordnung 1 bedeutet, der Fehler nimmt direkt proportional zu h ab: halbe Schrittweite, halber Fehler
- Ordnung 2 bedeutet, der Fehler nimmt quadratisch in h ab: halbe Schrittweite viertelt den Fehler

Konvergenz des Einschrittverfahrens

Ist der lokale Diskretisierungsfehler von der Ordnung $p \geq 1$ und genügt F einer Lipschitzbedingung, so geht auch der globale Diskretisierungsfehler mit dieser Ordnung nach Null: Das Einschrittverfahren ist konvergent von der Ordnung p.

globale Diskretisierungsfehler g und Schrittweiten h

stehen bei Fehlerordnung p im Verhältnis

$$\frac{g_2}{g_1} = \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^p$$

Numerische Lösungverfahren

Wichtige Einschrittverfahren sind

- Explizites Eulerverfahren – das klassische, einfachste Verfahren; heißt auch Eulersche Polygonzugverfahren (ein Verfahren 1. Ordnung)
- Verfahren von Heun, modifiziertes Euler-Verfahren (weil sie genauer sind: Verfahren 2. Ordnung)
- Implizites Eulerverfahren (weil es stabil ist; noch nicht behandelt)
- Klassische Runge-Kutta-Verfahren (weil man damit in der Praxis oft rechnet; Verfahren 4. Ordnung).
- RK-Verfahren mit der Dormand-Prince-Formel (weil Matlabs `ode45` damit rechnet, Ordnung 5 mit Kontrollrechnung 4. Ordnung).

Moderne Runge-Kutta-Verfahren

Klassisches RK-Verfahren wertet $f(x,y)$ viermal pro Schritt aus:

$$f(x,y), \quad f\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}k_1\right), \quad f\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}k_2\right), \quad f(x+h, y+hk_3).$$

Neuere Verfahren werten f an speziell günstigen Zwischenstellen aus und liefern gleichzeitig zwei Werte mit unterschiedlicher Fehlerordnung (Differenz $\approx$ Fehler).

Das Verfahren RK5(4) von Dormand und Prince (MATLAB: `ode45`) wertet f sechsmal aus und liefert Ergebnis mit Fehlerordnung 5, verwendet Ergebnis mit Fehlerordnung 4 zur Differenzbildung und Fehlerabschätzung

Ein- und Mehrschrittverfahren

- Runge-Kutta-Verfahren sind Einschritt-Verfahren: um $y(x+h)$ zu berechnen, brauchen sie die Lösung nur am unmittelbar vorhergehenden Punkt $y(x)$.
- Mehrschritt-Verfahren verwenden zur Berechnung von $y(x+h)$ die Werte von mehreren zurückliegenden Punkten $y(x), y(x-h), y(x-2h)\ldots$.
  Beispiel: Adams-Bashforth-Moulton-Verfahren. Eine Variante davon ist als `ode113` in MATLAB verfügbar.
- Vorteil von Mehrschritt-Verfahren: hohe Genauigkeit im Verhältnis zum Rechenaufwand, besonders bei "teurer" Auswertung von f.
- Nachteil von Mehrschritt-Verfahren: Braucht Anlaufphase. Nicht einfach bei variabler Schrittweite.

Fehlerkontrolle, Schrittweitensteuerung

- Fehlerschätzung: Rechne einen Schritt mit hoher Ordnung und nochmal, zur Kontrolle, mit um 1 geringerer Ordnung. Der Unterschied ϵ_1 ist eine Schätzung des tatsächlichen Fehlers.
- Schrittweite und Fehler stehen bei Fehlerordnung p im Verhältnis

$$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \approx \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^p$$

  Um eine gewünschtes ϵ_2 zu erreichen: Ändere Schrittweite h gemäß

$$h_2 = h_1 \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^{\frac{1}{p}}$$

- Steuerung in Matlab: Schranken für relativen und absoluten Fehler
  `options=odeset('RelTol',1.e-7,'AbsTol',1.e-10)`

Explizite und implizite Einschrittverfahren

starten jeweils mit x_0, y_0 und rechnen für $i = 0, 1, 2 \dots$

$$x_{i+1} = x_i + h$$
$$y_{i+1} = \dots$$

Explizit: $y_{i+1} = y_i + hF(x_i, y_i, h)$

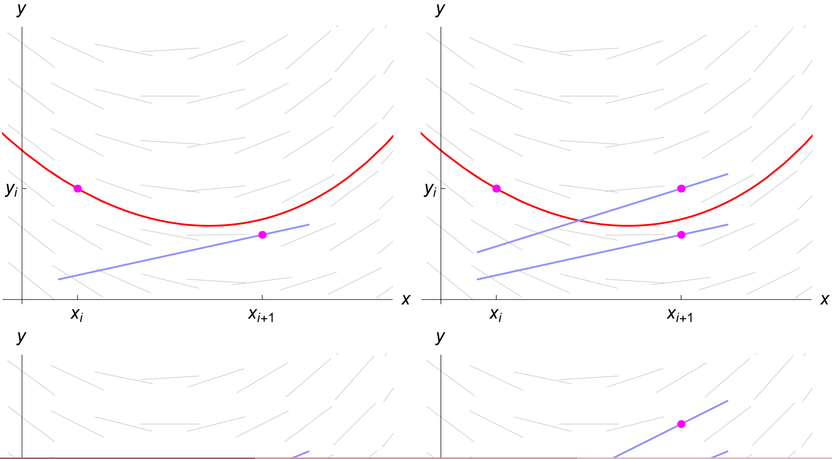
links gesuchte Größe, rechts nur bekannte Terme

Implizit: $y_{i+1} = y_i + hF(x, y_i,\ y_{i+1},\ h)$

gesuchte Größe y_{i+1} tritt auf beiden Seiten der Gleichung auf

Implizites Eulerverfahren: $y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$

- berechne Steigungen im Endpunkt $x_{i+1} = x + h$
- suche die Steigung, die Startpunkt (x_i, y_i) trifft
- löse dazu eine Gleichung für y_{i+1}



Beispiel: explizites und implizites Euler-Verfahren

Gegeben ist für $y = y(x)$ die Differentialgleichung mit Anfangsbedingung

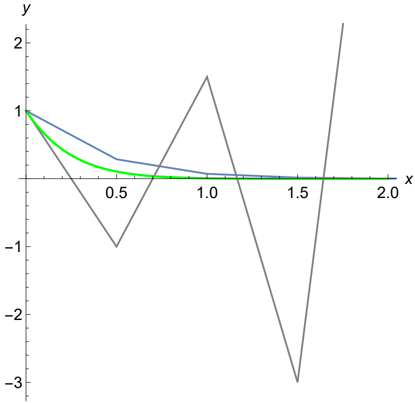
$$y' = -2(2+x)y \qquad y(0) = 1$$

(a) Berechnen Sie mit $h = \frac{1}{2}$ drei Schritte des expliziten Euler-Verfahrens.

(b) Das *implizite* Euler-Verfahren verwendet für eine Differentialgleichung der Form $y'(x) = f(x, y)$ den Rechenschritt

$$y_{i+1} = y_i + h\, f(x_{i+1}, y_{i+1}) \ .$$

Berechnen Sie drei Schritte mit diesem Verfahren. Explizites und implizites Euler-Verfahren sowie exakte Lösung sind nebenstehend grafisch dargestellt.



Warum braucht man implizite Einschrittverfahren?

Explizite Einschrittverfahren

eignen sich schlecht für gewisse Problemtypen:

- steife Differentialgleichungen , und speziell
- Differentialgleichungs-Systeme mit hoher Steifigkeit (Systeme behandeln wir erst in der nächsten Einheit).

Explizite Verfahren können Probleme dieses Typs nur mit unrealistisch kleinen Schrittweiten lösen.

Implizite Einschrittverfahren

sind rechenaufwändiger, haben nicht unbedingt höhere Fehlerordnung, berechnen aber Näherungslösungen, die auch bei größeren Schrittweiten qualitativ richtig liegen. Sie verhalten sich stabil.

Stabilität

Ein Verfahren heißt stabil bei Schrittweite h, wenn für das Modellproblem

$$y' = -y \qquad y(0) = 1$$

die numerische Lösung mit wachsendem x nach Null konvergiert.

- betrifft exponentiell abklingende Prozesse, beschrieben durch steife Differentialgleichungen.
- Stabile Verfahren geben den abklingenden Charakter qualitativ richtig wieder; instabile Näherungen oszillieren und/oder wachsen an.
- Faustregel: Implizite Verfahren – immer stabil, explizite Verfahren – nur bei kleinen Schrittweiten stabil.
- Stabilität: unterschiedliche Definitionen möglich.

Was sind steife Differentialgleichungen?

(Das ist ein Vorgriff auf die nächste Einheit)

Bei steifen Differentialgleichungen brauchen explizite Einschrittverfahren unvernünftig kleine Schrittweiten, obwohl sich die Lösung pro Schritt nahezu gar nicht ändert.

Beispiel: Freier Fall durch viskoses Medium (Löffel versinkt im Honig)
Bewegungsgleichung für Höhe $z(t)$: $\ddot{z} + D\dot{z} + 1 = 0$ mit $D \gg 1$
Nach kurzer Zeit $t \approx 1/D$ nahezu konstante Sinkgeschwindigkeit. Ab dann verläuft $z(t)$ unspektakulär linear.