

Fourier-Analyse II

Regularisierung inverser Probleme

12. Vorlesung
170.021 Numerische Methoden 1
(170.026 Numerische Methoden I)

Clemens Brand, Erika Hausenblas, Alexander Steinicke

Montanuniversität Leoben

15. Juni 2023

Fourierreihen

① Fourierreihe, Basisfunktionen, FFT (Nachtrag 11. Vorlesung)

Wichtige Eigenschaften: Orthogonalität, Norm

Basisvektoren, Basisfunktionen

Diskrete Fourierreihe, FFT

Basisvektoren

Frequenzanalyse

② Fourieranalyse, weitere Themen

Aliasing

Gibbs'sches Phänomen

Filtern, Denoising

Einige Prüfungsfragen

③ Inverse Probleme, Regularisierung

Beispiel: Gravimetrie

Gliederung 12. Vorlesung

① Fourierreihe, Basisfunktionen, FFT (Nachtrag 11. Vorlesung)

Wichtige Eigenschaften: Orthogonalität, Norm

Basisvektoren, Basisfunktionen

Diskrete Fourierreihe, FFT

Basisvektoren

Frequenzanalyse

② Fourieranalyse, weitere Themen

Aliasing

Gibbs'sches Phänomen

Filtern, Denoising

Einige Prüfungsfragen

③ Inverse Probleme, Regularisierung

Beispiel: Gravimetrie

Fourierreihe, Basisfunktionen, FFT (Nachtrag 11. Vorlesung)

Siehe 11. Vorlesung!

Gliederung 12. Vorlesung

① Fourierreihe, Basisfunktionen, FFT (Nachtrag 11. Vorlesung)

Wichtige Eigenschaften: Orthogonalität, Norm

Basisvektoren, Basisfunktionen

Diskrete Fourierreihe, FFT

② Fourieranalyse, weitere Themen

Aliasing

Gibbs'sches Phänomen

Filtern, Denoising

Einige Prüfungsfragen

③ Inverse Probleme, Regularisierung

Beispiel: Gravimetrie

Aliasing

Aliasing:

Als Aliasing-Effekte oder kurz Aliasing werden im Bereich der Signalanalyse Fehler bezeichnet, die auftreten, wenn im abzutastenden Signal Frequenzanteile vorkommen, die höher als die halbe Abtastfrequenz sind, oder, mit anderen Worten, ein Signal in zu großen Abständen abgetastet wurde.

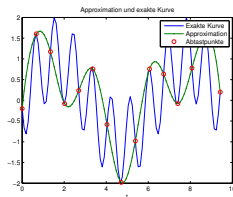
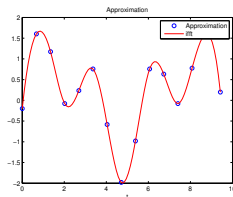
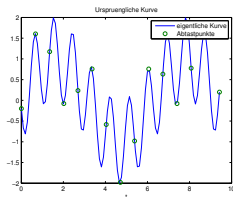
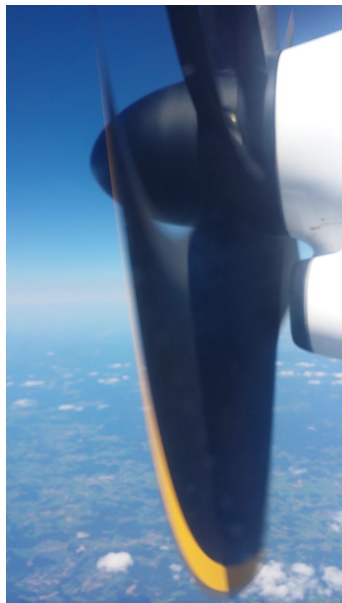


Abbildung: Der Aliasing Effekt

Aliasing über den Wolken

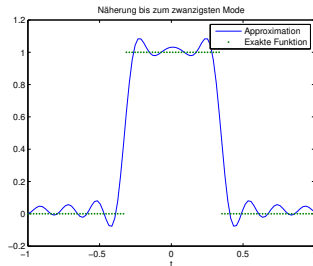
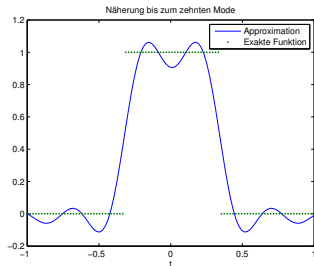
Auf dem Video `propeller.mp4` dreht sich der Propeller scheinbar recht langsam. Wenn Sie genau hinsehen und auf den Anstellwinkel der Propellerblätter achten, dreht er sich sogar rückwärts! Keine Panik, das sind Aliasing-Effekte. Die tatsächliche Propellerdrehzahl können Sie aus dem Betriebsgeräusch durch Fourieranalyse ermitteln.

Demodatei `FourierFlugzeug.m`,
Übungsaufgabe 96



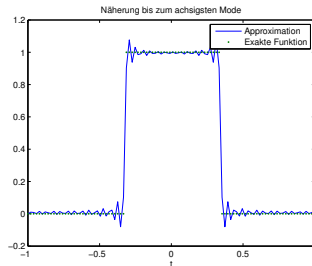
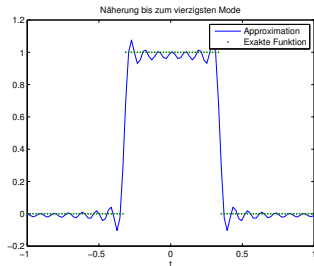
Gibbs'sches Phänomen

Hier soll eine Rechtecksfunktion als Fourierreihe dargestellt werden:



Gibbs'sches Phänomen

Mehr Terme bringen schon eine bessere Näherung, aber...



Gibbs'sches Phänomen

Kann bei Fourierreihen auftreten, wenn nur endlich viele Terme summiert werden

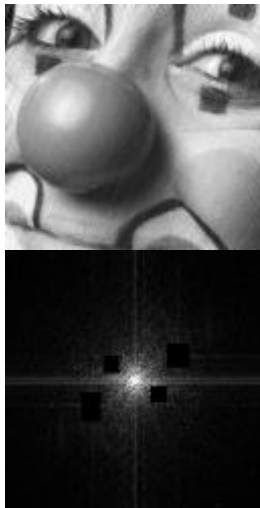
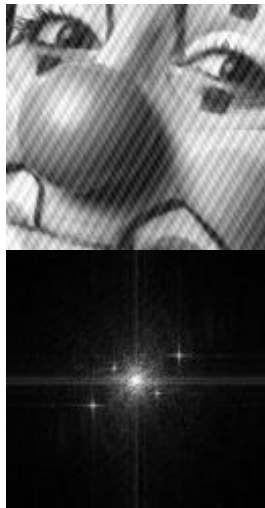
Bei Sprungstellen einer Funktion treten Überschwingungen auf

- ▶ Je mehr Terme einer Fourierreihe von f summiert werden, desto schmaler und schärfer begrenzt in der Umgebung der Sprungstelle.
- ▶ Die maximale Abweichung erreicht auch für $n \rightarrow \infty$ etwa 10% der Sprunghöhe. (Keine Konvergenz in der ∞ -Norm.)
- ▶ Die quadrierten Flächeninhalte der Abweichung konvergieren nach 0 für $n \rightarrow \infty$ (Konvergenz im Quadratischen Mittel, in der 2-Norm)
- ▶ Der Bereich mit den Abweichungen wird aber für $n \rightarrow \infty$ beliebig schmal: punktweise Konvergenz.

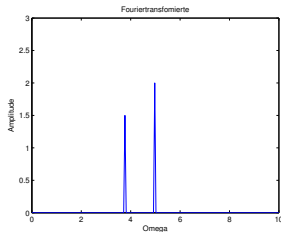
Siehe Übungsaufgabe 88

Filtern, Denoising

Anwendung der FFT. Siehe auch Übungsbeispiele 97, 98 und die Demo-Datei `fftBildMix.m`



- ▶ Die Fourierreihe einer Funktion zeigt im Spektrogramm nur zwei scharf begrenzte Spitzen, so wie hier dargestellt. Wie könnte die zugehörige Funktion aussehen? (Funktionsterm und Skizze!)



- ▶ Weitere Fragen: Siehe Test im Moodle-Kurs!

Gliederung 12. Vorlesung

① Fourierreihe, Basisfunktionen, FFT (Nachtrag 11. Vorlesung)

Wichtige Eigenschaften: Orthogonalität, Norm

Basisvektoren, Basisfunktionen

Diskrete Fourierreihe, FFT

② Fourieranalyse, weitere Themen

Aliasing

Gibbs'sches Phänomen

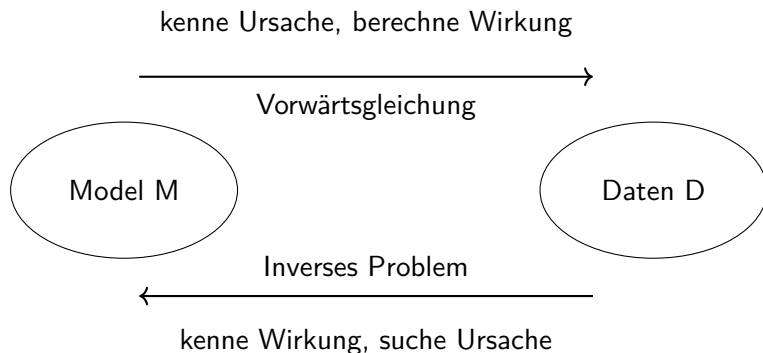
Filtern, Denoising

Einige Prüfungsfragen

③ Inverse Probleme, Regularisierung

Beispiel: Gravimetrie

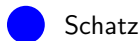
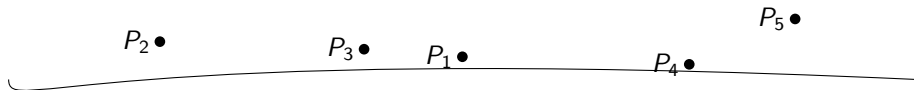
Was ist ein inverses Problem



Datei `InversesProblem.m` zeigt dazu ein ganz einfaches Beispiel.

Gravimetrie - Schatzsuche

Rekonstruiere Masseverteilung im Untergrund aus Messungen an der Oberfläche



Datei `InverseProbGrav.m` zeigt dazu ein Beispiel: Das inverse Problem ist nur mittels Regularisierung sinnvoll lösbar.