

# Nichtlineare Gleichungen, Nullstellen, Fixpunkte

1. Vorlesung

170.021 Numerische Methoden 1

(170.026 Numerische Methoden I )

Clemens Brand, Erika Hausenblas, Alexander Steinicke

Montanuniversität Leoben

7. März 2024

- ▶ Die geplanten Termine der Übungsgruppen (ab nächster Woche)
  - ▶ Mittwoch 12–14 Uhr
  - ▶ Mittwoch 14–16 Uhr (English)

Gruppengröße und Auslastung bei den beiden Terminen ist heuer extrem ungünstig. Zusätzliche Gruppe?

- ▶ Vorlesungsfolien, Skriptum und Unterlagen finden Sie in Moodle:  
<https://moodle.unileoben.ac.at/course/view.php?id=3725>
- ▶ Sonst noch Fragen oder Wünsche?

## Wie Sie die Lehrenden erreichen können

Lehrstuhl für Angewandte Mathematik

Sekretariat: Stephan Lichtenegger

Büro TTZ, Peter-Tunner-Str. 25, 1. Stock Nordtrakt

E-Mail [stephan.lichtenegger@unileoben.ac.at](mailto:stephan.lichtenegger@unileoben.ac.at)

Telefon 402 1701

Sprechstunde vormittags zu den üblichen Bürozeiten.



# Lehrbücher

über MUL Onlinezugang verfügbar – nutzen Sie die Download-Möglichkeit!

- ▶ Alfio Quarteroni, Fausto Saleri. *Wissenschaftliches Rechnen mit MATLAB*
- ▶ Wolfgang Dahmen, Arnold Reusken. *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*
- ▶ Thomas Huckle, Stefan Schneider. *Numerische Methoden*
- ▶ Michael Knorrenschild. *Numerische Mathematik*
- ▶ Robert Plato. *Numerische Mathematik kompakt*
- ▶ Hans Rudolf Schwarz, Norbert Köckler. *Numerische Mathematik*
- ▶ Günter Bärowolf. *Numerik für Ingenieure, Physiker und Informatiker*  
(nur am Lehrstuhl verfügbar)

# Inhalt und Themen

13 Vorlesungseinheiten geplant

- ▶ Nichtlineare Gleichungen, Nullstellen, Fixpunkte
- ▶ Fixpunkt-Iterationen, ein- und mehrdimensional
- ▶ Lineare Gleichungssysteme
- ▶ Überbestimmte Systeme, Matrixzerlegungen, Datenmodelle
- ▶ Polynomiale Regression, Interpolation, numerische Integration
- ▶ Eigenwertaufgaben
- ▶ Gewöhnliche Differentialgleichungen
- ▶ Fourier-Analyse
- ▶ Iterative Gleichungslöser
- ▶ Inverse Probleme, Singulärwertzerlegung
- ▶ Partielle Differentialgleichungen

# Vorwissen: Erinnern Sie sich noch?

Wenn nicht, sollten Sie diese Themen wiederholen. . .

- ▶ Differential- und Integralrechnung
- ▶ Vektorrechnung
- ▶ Matrixalgebra, lineare Gleichungssysteme, Eigenwerte
- ▶ Gewöhnliche Differentialgleichungen

# Aufgabentypen

Gleichungen lassen sich in verschiedener Weise formulieren und lösen

## Die Problemstellung

Gesucht ist ein  $x$ , für das gilt. . .

$g(x) = h(x),$	(Finden der <b>Lösung</b> einer Gleichung)
$f(x) = 0,$	(Finden einer <b>Nullstelle</b> der Funktion $f$ )
$x = f(x),$	(Finden eines <b>Fixpunktes</b> der Funktion $f$ )

## Definition

Unter einer **Nullstelle** der Funktion  $f$  versteht man eine Lösung der Gleichung  $f(x) = 0$ .

Unter einem **Fixpunkt** der Funktion  $f$  versteht man eine Lösung der Gleichung  $x = f(x)$ .

# Beispiel: Eine Aufgabe, drei Schreibweisen

Gleichung – Nullstelle – Fixpunkt

## Erste Formulierung

$$3 \cos x = \log x$$

Gesucht ist die Lösung einer **Gleichung** in der Form  $g(x) = h(x)$ .

## Umgeformt

$$3 \cos x - \log x = 0$$

Gesucht sind **Nullstellen** der Funktion  $f(x) = 3 \cos x - \log x$ .

## Anders umgeformt

$$x = \arccos \frac{\log x}{3}$$

Gesucht ist ein **Fixpunkt** der Funktion  $\phi(x) = \arccos \frac{\log x}{3}$

Je nach Formulierung gibt es unterschiedliche passende Lösungsverfahren

# Anmerkung zur Schreibweise von Funktionen

aus Platzgründen auf den Folien oft ein wenig unvollständig

Die Präsentationsfolien nehmen an, dass Sie...

- ▶ Definitions- und Wertemenge aus dem Kontext sinnvoll ergänzen;
- ▶ die Begriffe *Funktion*, *Funktionswert*, *Funktionsterm*, *Funktionsgraph*, *Funktionsgleichung*, *Zuordnungsvorschrift* auseinanderhalten können.

Beispiele für ausführliche Schreibweise:

Funktionsname, Definitions- und Zielmenge, Zuordnungsvorschrift

gesucht sind Nullstellen der Funktion  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto 3 \cos x - \log x$

Funktionsname, Funktionsgleichung, Definitionsmenge

gesucht sind Nullstellen der Funktion  $f$ , gegeben durch die Funktionsgleichung  $f(x) = 3 \cos x - \log x$  mit  $x \in \mathbb{R}^+$

# Arten von Gleichungen, Lösbarkeit

linear, nichtlinear, polynomial, algebraisch, transzendent

## polynomiale Gleichungen

linear  $8x + 13 = 0$

quadratisch  $x = 1 - x^2$

kubisch  $x^3 + px^2 + qx + r = 0$

usw. ...

## algebraische Gleichungen $\sqrt{1+x} = x^3$

enthalten nur **elementare Rechenoperationen** (+, -, \*, /, Potenzen,  $\sqrt{\quad}$ )

## transzendente Gleichungen $3 \cos x = \log x$

enthalten Funktionen wie sin, exp, log

Polynomiale Gleichungen ab dem fünften Grad und transzendente Gleichungen lassen sich gewöhnlich **nicht durch eine endliche Zahl** elementarer Rechenoperationen lösen.

Numerische Verfahren liefern aber Näherungen, die schrittweise, mit immer besserer Genauigkeit, die Lösungen anstreben.

# Vokabelheft

Machen Sie sich rasch mit englischen Fachbegriffen vertraut (auch wichtig zum Verstehen der MATLAB-Hilfe oder von Internet-Seiten)

root of an equation Lösung einer Gleichung (auch im Deutschen heißen Lösungen, speziell polynomialer Gleichungen, **Wurzeln**)

root-finding algorithm Verfahren zur Nullstellensuche

zeros (fixed points) of a function Nullstellen (Fixpunkte) einer Funktion

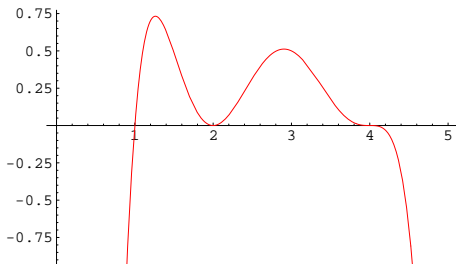
multiple zeros mehrfache Nullstellen

a quadratic / cubic / quartic Ein quadratisches / kubisches Polynom, ein Polynom vierten Grades

# Mehrfache Nullstellen

Einfache, doppelte und dreifache Nullstellen des Polynoms

$$-\frac{1}{4}(x-4)^3(x-2)^2(x-1)$$



## Definition

Eine Funktion  $f$  hat bei  $x$  eine genau  $n$ -fache Nullstelle, wenn zugleich

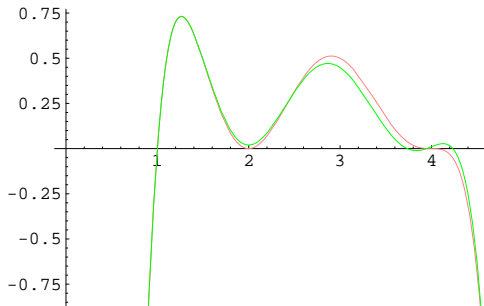
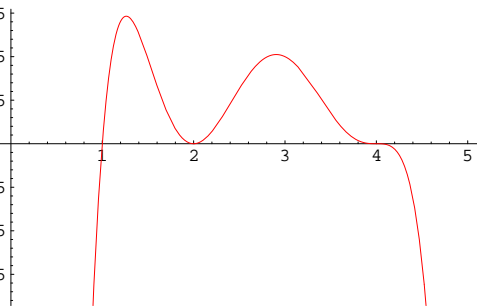
$$f(x) = 0, f'(x) = 0, f''(x) = 0, \dots, f^{(n-1)}(x) = 0 \text{ und } f^{(n)}(x) \neq 0.$$

# Schlecht konditioniertes Problem

Definition: Kleine Änderungen der Daten  $\rightarrow$  starke Änderungen im Ergebnis

Die numerische Berechnung **mehrfacher** Nullstellen ist extrem anfällig gegenüber kleinen Änderungen der Polynom-Koeffizienten. Konsequenz:

- ▶ Rundungsfehler wirken sich drastisch aus.
- ▶ Nullstellen verschwinden, verschieben oder vermehren sich.



# Ungeeignete Lösungsverfahren

Auch bei einem numerisch an sich gutartigem Problem können Rundungsfehler in einer ungeeigneten Lösungsmethode ungenaue Resultate liefern.

Gesucht ist die kleinere Lösung von  $x^2 - 12345678x + 9 = 0$

Die gängige Lösungsformel

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

liefert folgende Resultate:

Sharp EL-506 S	0
TI-36X Solar	0
TI Programmable 58	0,000001
Java, Datentyp double	7.292255... e-7
MS Calculator V.5	7.2900005977... e-7

Erklärung: Subtraktion annähernd gleicher Werte → **Auslöschung signifikanter Stellen!**

# Geeignete Lösungsmethoden

für die betragskleinere Wurzel von  $x^2 - 12345678x + 9$

- ▶ Die „richtige“ Lösungsformel für  $x_1$  und  $x_2$

$$x_1 = -\frac{p}{2} - (\operatorname{sgn} p) \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad x_2 = \frac{q}{x_1}$$

- ▶ Auflösen nach dem linearen Term  $\rightarrow$  Fixpunkt-Gleichung, Iteration

$$x = \frac{x^2 + 9}{12345678}$$

Die klassischen Lösungsformel kann zu Auslöschung signifikanter Stellen (Rundungsfehler) führen. Manchmal ist eine numerische Lösung sinnvoller.

## Kubische Gleichung: Lösungsformel (??)

Auch für kubische Gleichungen gibt es eine explizite, aber nur bedingt brauchbare Lösungsformel. Es lautet eine der drei Lösungen von

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

$$x = \frac{1}{6} \left( -2p + \frac{2^{\frac{4}{3}} (p^2 - 3q)}{\left( -2p^3 + 9pq - 27r + \sqrt{-4(p^2 - 3q)^3 + (2p^3 - 9pq + 27r)^2} \right)^{\frac{1}{3}}} + 2^{\frac{2}{3}} \left( -2p^3 + 9pq - 27r + \sqrt{-4(p^2 - 3q)^3 + (2p^3 - 9pq + 27r)^2} \right)^{\frac{1}{3}} \right)$$

Die expliziten Lösungsformeln für kubische Gleichungen sind sehr umständlich – es gibt einfache numerische Verfahren.

## Beispiel: Dissoziation einer Säure

Es gilt die Gleichung

$$x^2 + K_s x - K_s c_0 = 0 \quad \text{mit} \quad \begin{cases} x & \text{Konzentration der H}^+ \text{- Ionen} \\ c_0 & \text{Anfangskonzentration der Säure} \\ K_s & \text{Säuredissoziationskonstante} \end{cases}$$

Zwei mögliche Umformungen zu Fixpunkt-Gleichungen

$$K_s x = K_s c_0 - x^2$$

$$x = c_0 - \frac{x^2}{K_s}$$

$$x \approx c_0$$

$$x^2 = K_s c_0 - K_s x$$

$$x = \sqrt{K_s (c_0 - x)}$$

$$x \approx \sqrt{K_s c_0}$$

(für  $K_s \gg c_0$ , starke Säuren)

(für  $K_s \ll c_0$ , schwache Säuren)

Bei starken oder schwachen Säuren ist die klassische Lösungsformel weder notwendig noch sinnvoll.

## Am Computer

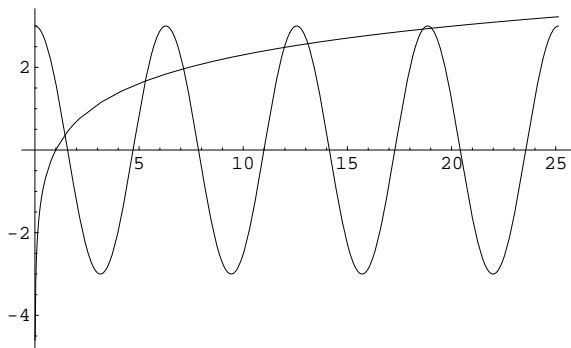
- ▶ Graphische Lösung, Zoomen in Funktionsgraph
- ▶ Systematisches Einsetzen in Wertetabelle
- ▶ Excel: Zielwertsuche
- ▶ MATLAB: `fzero`, `roots`

## Klassische Methoden

- ▶ Intervallhalbierung
- ▶ Sekantenmethode (inklusive Regula falsi und Varianten)
- ▶ Newton-Verfahren
- ▶ Fixpunkt-Iteration

$$3 \cos x = \log x$$

Graphische Lösung: Ein Bild sagt mehr als tausend Formeln

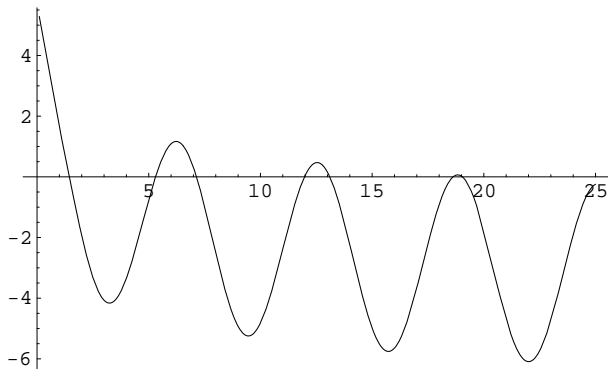


Den  $x$ -Werten der **Schnittpunkte** **Schnitt- oder Berührungspunkte** der beiden Funktionsgraphen  $g(x) = 3 \cos x$  und  $h(x) = \log x$  entsprechen die **Lösungen** der Gleichung  $g(x) = h(x)$ .

Diese Darstellung eignet sich gut, wenn linke und rechte Seite „einfach“ zu zeichnen sind

$$f(x) = 3 \cos x - \log x$$

Am Funktionsgraph lassen sich die Nullstellen ablesen

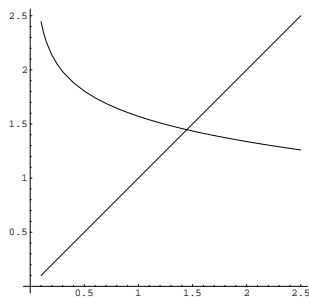


Die Nullstellen von  $f$  sind die Lösungen der Gleichung  $f(x) = 0$ .

$$\phi(x) = \arccos(\log(x)/3)$$

Aller guten Bilder sind drei: Fixpunkt-Aufgabe.

Achtung! Umformung ändert hier die Lösungsmenge.



Ist  $x$  ein Fixpunkt der Funktion  $\phi$ , dann schneidet der Funktionsgraph im Punkt  $(x|x)$  die Gerade  $y = x$ , die **erste Mediane** (oder berührt sie dort). Der Fixpunkt von  $\phi$  entspricht der Nullstelle von  $f$  in der Nähe von 1,4. Weitere Fixpunkte von  $\phi$  gibt es nicht. Durch die Umformulierung sind Lösungen der ursprünglichen Gleichung verlorengegangen!

- ▶ Intervallhalbierung ist ein einfaches und robustes Verfahren zum Finden von Nullstellen.
- ▶ Es beginnt mit einem Intervall, in dem die Funktion eine Nullstelle hat.
- ▶ Es teilt das Intervall in der Mitte und wählt jene Hälfte, in der eine Nullstelle liegt.
- ▶ Es wiederholt diesen Schritt bis zur gewünschten Genauigkeit

# Intervallhalbierung, etwas formaler

## Gegeben:

eine Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , zwei Werte  $a$  und  $b$  mit  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , eine Genauigkeitsschranke  $\epsilon > 0$ .

## Ergebnis:

Ist  $f$  im Intervall  $a \leq x \leq b$  stetig, dann findet dieser Algorithmus die Näherung  $c$  an eine Nullstelle  $x_0$  von  $f$  mit Genauigkeit  $|c - x_0| < \epsilon$ .

## Algorithmus:

Wiederhole

  setze  $c = (a + b)/2$

  falls  $f(a) \cdot f(c) < 0$

    setze  $b \leftarrow c$

  sonst

    setze  $a \leftarrow c$

bis  $|b - a| < \epsilon$  oder  $f(c) = 0$

# Zwischenwertsatz

Ein Satz aus der reellen Analysis liefert die theoretische Begründung des Verfahrens

Eine Funktion  $f$ , die auf einem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  stetig ist, nimmt in diesem Intervall auch jeden Wert zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  an.

## Korollar (Nullstellensatz von Bolzano):

Eine in einem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  stetige Funktion  $f$ , welche für  $x = a$  negativ, für  $x = b$  positiv ist (oder umgekehrt), hat mindestens eine Nullstelle in diesem Intervall.

# Konvergenzgeschwindigkeit

Wie rasch findet Intervallhalbierung eine Nullstelle?

- ▶ Intervallhalbierung liefert ein Intervall  $[a, b]$ , in dem die Nullstelle  $x$  liegen muss.
- ▶ Die beste Schätzung für den Wert  $x$  ist der Mittelpunkt des Intervalls.
- ▶ Der maximale Fehler beträgt  $(b - a)/2$ .
- ▶ Diese Fehler-Schranke halbiert sich bei jedem Schritt.
- ▶ Weil  $2^{10} = 1024 \approx 1000$ , reduzieren **zehn Schritte** die Schranke um einen Faktor 1000, das entspricht **drei Dezimalstellen** Genauigkeitsgewinn.

Intervallhalbierung braucht etwas mehr als drei Schritte pro Dezimalstelle  
Genauigkeitsgewinn

# Regula Falsi

- ▶ Die Regula Falsi ist ein Verfahren zur numerischen Berechnung von Nullstellen.
- ▶ Es läuft ähnlich ab wie die Intervallhalbierung. Einziger Unterschied: Die Regula Falsi teilt das Intervall nicht in der Mitte, sondern berechnet

$$c = a - f(a) \frac{a - b}{f(a) - f(b)}$$

- ▶ Interpretation: Regula Falsi **ersetzt die Funktion  $f$  im Bereich  $[a, b]$  durch eine Gerade**. Der berechnete Wert  $c$  ist deren Nullstelle.
- ▶ Trotz dieser Verbesserung konvergiert sie letztlich nicht wesentlich schneller als Intervallhalbierung.
- ▶ Moderne Versionen der Regula Falsi (Illinois-, Pegasus- und Anderson/Björk-Verfahren) konvergieren deutlich schneller (höhere Konvergenzordnung – siehe später).

# Regula falsi (algorithmische Beschreibung)

## Angabe und Ergebnis

Eine Funktion  $f$ , zwei Werte  $a$  und  $b$  mit  $f(a) \cdot f(b) < 0$  und eine Genauigkeitsschranke  $\epsilon > 0$ . Ist  $f(x)$  im Intervall  $a \leq x \leq b$  stetig, dann findet dieser Algorithmus die Näherung  $c$  an eine Nullstelle  $c_0$  von  $f$  mit Genauigkeit  $|c - c_0| < \epsilon$

## Algorithmus:

Wiederhole

setze  $c \leftarrow a - f(a) \frac{a-b}{f(a)-f(b)}$

falls  $f(b) \cdot f(c) < 0$

setze  $a \leftarrow b$

sonst

(Originalversion) nix

(Illinois-Variante) reduziere  $f(a)$  auf  $\frac{1}{2}f(a)$

setze  $b \leftarrow c$

bis  $|b - a| < \epsilon$  oder  $f(c) = 0$

# Sekantenmethode

Rechnet wie Regula falsi mit linearer Interpolation, verzichtet aber auf den Einschluss der Nullstelle

## Gegeben

eine Funktion  $f(x)$  und zwei Startwerte  $x^{(0)}$  und  $x^{(1)}$ .

## Ergebnis

falls konvergent, eine Nullstelle von  $f$ .

## Iterationsvorschrift

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - f(x^{(k)}) \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})} \quad \text{für } k = 1, 2, 3 \dots$$

Meist schneller als Intervallhalbierung, dafür keine Konvergenz-Garantie!

# Newton-Verfahren

(manche sagen auch Newton-Raphson-Verfahren dazu)

## Gegeben

eine differenzierbare Funktion  $f(x)$  und ein Startwert  $x^{(0)}$ .

## Ergebnis

falls konvergent, eine Nullstelle von  $f$ .

## Iterationsvorschrift

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots$$

Isaac Newton schreibt seine Methode 1669 nieder, allerdings in ganz anderer Formulierung – nur für Polynome und ohne Differentialrechnung. Joseph Raphson veröffentlicht 1690 eine vereinfachte Darstellung. Erst 1740 beschreibt Thomas Simpson das allgemeine iterative Verfahren, so wie wir es kennen.

# Fixpunkt-Iteration (in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$ )

Das Grundprinzip vieler iterativer Verfahren

## Gegeben

eine stetige Funktion  $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  und ein Startwert  $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ .

## Ergebnis

Falls konvergent, liefert die Fixpunkt-Iteration einen Fixpunkt  $\mathbf{x}^*$  von  $\Phi$ .

## Iterationsvorschrift

für  $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \Phi(\mathbf{x}^{(k)})$$

Viele numerische Verfahren lassen sich als Fixpunkt-Iterationen formulieren. Die Theorie der Fixpunkt-Iteration ist daher von grundlegender Bedeutung.

# Schreibweise für vektorwertige Funktionen

Vektoren und vektorwertige Funktionen fett gedruckt – aber in dieser Einheit sind die meisten Funktionen noch skalar...

Reellwertige Funktionen, Skalare:  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ,  $y = f(x)$

Vektorwertige Funktionen, Vektoren:  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ,  $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$

Komponenten eines Vektors  $\in \mathbb{R}^n$ :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{oder } \mathbf{x}^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]$$

Normalerweise ist mit  $\mathbf{x}$  ein Spalten-, mit  $\mathbf{x}^T$  ein Zeilenvektor gemeint.

Iterationsindizes sind (um sie von Vektorkomponenten zu unterscheiden) in der Regel hochgestellt, in Klammern:  $\mathbf{x}^{(k)}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

# Fixpunkt-Iteration, graphisch interpretiert

wagrecht zur Mediane, senkrecht zur Funktion

Fixpunkt-Iteration

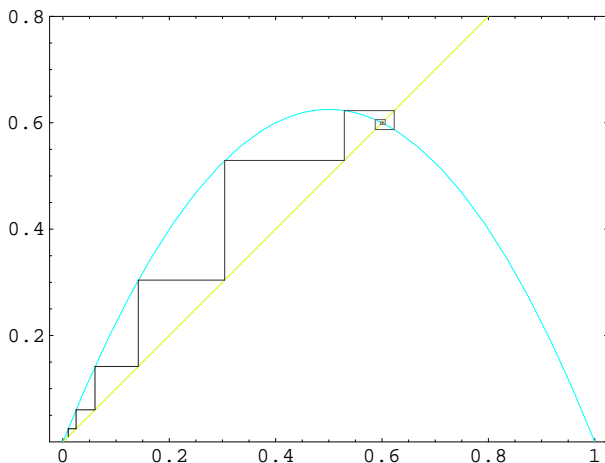
$$x = ax(1 - x)$$

graphisch  
veranschaulicht für

$$a = 5/2$$

Startwert

$$x = 1/100$$



## Fixpunkt-Iteration

$$x = ax(1 - x)$$

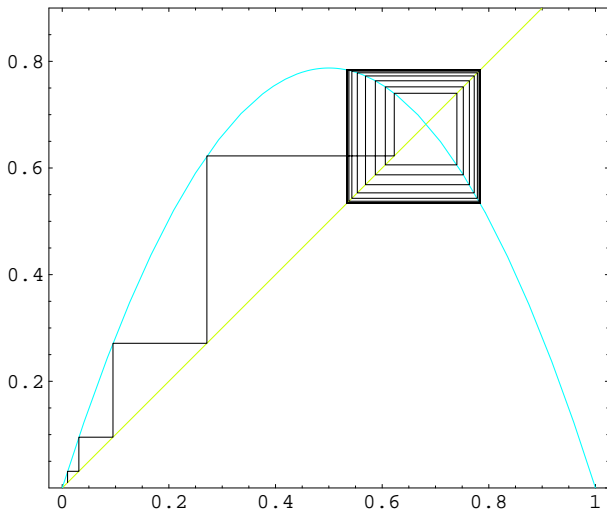
für  $a = 3,15$

Startwert

$$x = 1/100$$

konvergiert zu  
Zyklus  
mit Periode 2

weitere Beispiele:  
Logo des Lehrstuhls

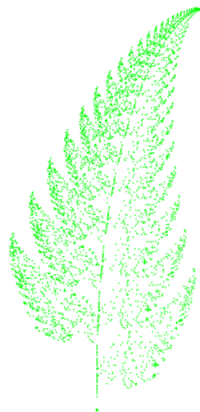
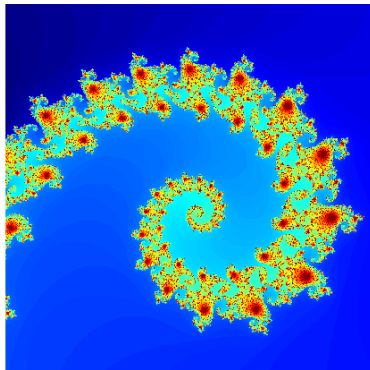


Das Logo unseres Lehstuhls symbolisiert chaotische Dynamik :-)



# Ergebnisse von Fixpunkt-Iterationen in $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$

Mandelbrot-Menge und Barnsleys Farn, dazu gibt MATLAB-Skripts



# Ein Beispiel

$$x - \epsilon \sin x = m$$

Die Kepler-Gleichung setzt verschiedene Parameter einer elliptischen Umlaufbahn in Beziehung

Angenommen,  $\epsilon \ll 1$  und  $m \geq 0$  sind gegeben;  $x$  ist gesucht.

Formulieren Sie selber Lösungswege

- ▶ graphische Darstellung: wo liegen überhaupt Lösungen?
- ▶ Durch Fixpunkt-Iteration
- ▶ Als Nullstellen-Aufgabe (hier lassen sich das Newtonsche Verfahren oder die Sekanten-Methode gut anwenden)

# Fixpunkt-Verfahren für Kepler-Gleichung

findet Fixpunkt von  $\phi(x) = m + \epsilon \sin x$

Konkret für  $m = 2, \epsilon = 0,1$  und Startwert  $x^{(0)} = 0$  ergibt sich

neue Näherung	$x^{(1)} = \phi(x^{(0)}) =$	2,00000 00000 00000 00000
und weiter...	$x^{(2)} = \phi(x^{(1)}) =$	2,09092 97426 82568 16954
	$x^{(3)} = \phi(x^{(2)}) =$	2,08677 52880 24968 62712
	$x^{(4)} = \phi(x^{(3)}) =$	2,08698 10132 82436 76955
	$x^{(5)} = \phi(x^{(4)}) =$	2,08697 08612 33421 23181
	$x^{(6)} = \phi(x^{(5)}) =$	2,08697 13622 99081 87912
	$x^{(7)} = \phi(x^{(6)}) =$	2,08697 13375 68639 67423

Die Anzahl richtiger Stelle nimmt konstant zu (hier  $\approx 1-2$  pro Iteration)

# Newton-Verfahren für Kepler-Gleichung

findet Nullstelle von  $f(x) = x - \epsilon \sin x - m$

$$f(x) = x - \epsilon \sin x - m$$

Funktion

$$f'(x) = 1 - \epsilon \cos x$$

Ableitung

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{x^{(n)} - \epsilon \sin x^{(n)} - m}{1 - \epsilon \cos x^{(n)}}$$

Iterationsvorschrift

Konkret für  $m = 2, \epsilon = 0,1$  und Startwert  $x^{(0)} = 0$  ergibt sich

$$f(x^{(0)}) = -2 \quad f'(x^{(0)}) = 0,9$$

neue Näherung  $x^{(1)} = 2,22222\ 22222\ 22222\ 22222$

und weiter...  $x^{(2)} = 2,08767\ 96060\ 17866\ 31513$

$$x^{(3)} = 2,08697\ 13595\ 13269\ 54514$$

$$x^{(4)} = 2,08697\ 13387\ 31818\ 75247$$

$$x^{(5)} = 2,08697\ 13387\ 31818\ 73458$$

Die Anzahl richtiger Stellen nimmt immer rascher zu

# Newton-Verfahren in Fixpunkt-Form

Auch das Newton-Verfahren ist ein Fixpunkt-Verfahren!

## Fixpunkt-Gleichung

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

## Bitte verwechseln Sie nicht

Das Newton-Verfahren sucht eine **Nullstelle** einer Funktion  $f$ .

Das Newton-Verfahren wendet **Fixpunkt-Iteration** auf die Funktion  $\phi$  an.

$$\phi(x) = x - f(x)/f'(x)$$

# Sekantenmethode für Kepler-Gleichung

berechnet aus zwei alten Werten den nächsten

Wähle Startwerte  $x^{(0)} = 0$ ;  $x^{(1)} = 2$

Nächster Wert  $x^{(2)} = x^{(1)} - f(x^{(1)}) \frac{x^{(1)} - x^{(0)}}{f(x^{(1)}) - f(x^{(0)})}$

neue Näherung  $x^{(2)} = 2,09526\ 07609\ 21748\ 27768$

und weiter...  $x^{(3)} = 2,08694\ 09346\ 18957\ 85429$

$x^{(4)} = 2,08697\ 13283\ 07441\ 26503$

$x^{(5)} = 2,08697\ 13387\ 31831\ 86894$

$x^{(6)} = 2,08697\ 13387\ 31818\ 73458$

Die Anzahl richtiger Stellen nimmt auch hier rasch zu

# Sekantenmethode

Sekantenmethode ist zweidimensionale Fixpunkt-Iteration

Die Sekantenmethode berechnet aus zwei Näherungen  $x^{(0)}, x^{(1)}$  eine verbesserte Näherung, rechnet dann mit zwei neuen Näherungen weiter. Fasse die beiden Näherungen als Komponenten eines Vektors auf. Die Schreibweise

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \Phi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 - f(x_2) \frac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)} \end{bmatrix}$$

formuliert die Sekantenmethode als zweidimensionale Fixpunkt-Iteration

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \Phi(\mathbf{x}^{(k)}) \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots$$

# Reihenentwicklung

Nur damit Sie sehen: nicht alle Näherungsverfahren sind vom Typ der Fixpunkt-Iteration

- ▶ Reihenentwicklungen sind ein anderer Typ von Näherungsverfahren (die wir hier nicht weiter behandeln).
- ▶ Für die Kepler-Gleichung gilt (unter Vernachlässigung vierter und höherer Potenzen von  $\epsilon$ ):

$$x = m + \left( \epsilon - \frac{\epsilon^3}{8} \right) \sin(m) + \frac{\epsilon^2}{2} \sin(2m) + \frac{3\epsilon^3}{8} \sin(3m) + \dots$$

- ▶ Je kleiner  $\epsilon$ , desto genauer. Für zu große  $\epsilon$  unbrauchbar.

# Verfahren in der Übersicht

## Vorteile, Nachteile

- ▶ **Intervallhalbierung, Regula Falsi:** Funktionieren garantiert bei stetigen Funktionen wenn Anfangsintervall Nullstelle einschließt. Langsame Konvergenz (es gibt deutlich schnellere Varianten).
- ▶ **Sekantenmethode** Schnellere Konvergenz als bei den beiden obigen Verfahren, wenn Funktion „gutartig“ (glatt) ist. Kann fehlschlagen.
- ▶ **Newton-Raphson-Verfahren** Noch schnellere Konvergenz bei glatten Funktionen. Braucht Ableitungen und gute Startwerte.
- ▶ **Fixpunkt-Iteration** Rasch und einfach, wenn komplizierte Terme in erster Näherung vernachlässigt werden können. Kein Kochrezept.

Rechenumgebungen wie MATLAB kombinieren trickreich mehrere Verfahren.

# Wiederholung, Fragenliste

## Nichtlineare Gleichungen in einer Variablen

- Was ist. . .
- ▶ eine lineare (nichtlineare, polynomiale, algebraische, transzendente) Gleichung?
  - ▶ eine Nullstelle? . . . mehrfache Nullstelle?
  - ▶ ein Fixpunkt?
- Wie geht. . .
- ▶ Intervallhalbierung? . . . Regula Falsi?
  - ▶ Sekantenmethode? . . . Newton-Verfahren?
- Theorie
- ▶ Wann, warum und wie schnell findet Intervallhalbierung garantiert eine Nullstelle?
  - ▶ Iterationsvorschrift einer Fixpunkt-Iteration im  $\mathbb{R}^n$

## Eine Prüfungsfrage

Gesucht ist die Lösung der Gleichung

$$x \ln x = 8 .$$

Ordnen Sie zu: Welche Iterationsvorschrift entspricht welchem Verfahren?

**A**  $x^{(n+1)} = \frac{8}{\ln x^{(n)}}$

Newton-Verf.

**B**  $x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{x^{(n)} \ln x^{(n)} - 8}{1 + \ln x^{(n)}}$

Sekanten-Meth.

**C**  $x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{(x^{(n-1)} - x^{(n)}) (x^{(n)} \ln x^{(n)} - 8)}{x^{(n-1)} \ln x^{(n-1)} - x^{(n)} \ln x^{(n)}}$

Fixpunkt-It.

## Noch eine Prüfungsfrage

Die Funktion

$$\phi(x) = \frac{1}{6} (-x^3 + 2x^2 + 7x - 2)$$

hat Fixpunkte für  $x = -1$ ,  $+1$  und  $+2$ ; sie hat eine Nullstelle nahe bei  $x = \frac{1}{4}$ .

- 1 Führen Sie für die drei verschiedenen Startwerte  $x^{(0)} = -1,1$ ;  $x^{(0)} = +1,1$  und  $x^{(0)} = 2,1$  jeweils einige Schritte der Fixpunkt-Iteration aus. Beschreiben Sie das Verhalten der Iterationen.
- 2 Finden Sie einen Näherungswert (vier korrekte Nachkommastellen) für die *Nullstelle* von  $\phi$  mit dem Newtonschen Verfahren (Startwert 0).
- 3 Angenommen, Sie wollen durch Intervallhalbierung eine Nullstelle von  $\phi$  finden, mit Fehler  $\epsilon < 10^{-3}$ . Sie beginnen mit dem Intervall  $[0, 1]$ . Wie viele Schritte brauchen Sie? Erklären Sie, warum.