Nonlinear Equations, Zeros, Fixed Points

Lecture 1

170.021 Numerische Methoden 1

(170.026 Numerische Methoden I)

Clemens Brand, Erika Hausenblas, Alexander Steinicke

Montanuniversität Leoben

March 7., 2024

Organizational Stuff

- Lab groups will start next week
  - Wednesday 12–14 h
  - Wednesday 14–16 h (English)

  Group sizes are far from optimal. Small English group, German group too big.
- Presentation slides, lecture notes and supplementary marerial in Moodle:
  `https://moodle.unileoben.ac.at/course/view.php?id=3725`
- Any questions?

Organization and supervision in this course

How to reach the lecturers

Lehrstuhl für Angewandte Mathematik
Sekretariat: Stephan Lichtenegger

Büro TTZ, Peter-Tunner-Str. 25, 1. Stock Nordtrakt

E-Mail stephan.lichtenegger@unileoben.ac.at

Telefon 402 1701

Sprechstunde vormittags zu den üblichen Bürozeiten.

Textbooks

Books in German are available via MUL Online

(For Textbooks in English, ask at the Department)

- Alfio Quarteroni, Fausto Saleri. *Wissenschaftliches Rechnen mit MATLAB*
- Wolfgang Dahmen, Arnold Reusken. *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*
- Thomas Huckle, Stefan Schneider. *Numerische Methoden*
- Michael Knorrenschild. *Numerische Mathematik*
- Robert Plato. *Numerische Mathematik kompakt*
- Hans Rudolf Schwarz, Norbert Köckler. *Numerische Mathematik*
- Günter Bärwolff. *Numerik für Ingenieure, Physiker und Informatiker*

(nur am Lehrstuhl verfügbar)

Table of Contents

13 Units planned

Previous knowledge expected: Do you still remember?

If not, you should repeat these topics. . .

- Differential and integral calculus
- Vector calculus
- Matrix algebra, systems of linear equations, eigenvalues
- Ordinary differential equations

Problem Types

Equations can be formulated and solved in different ways

Problem

Find an x, so that...

$$
\begin{aligned}
g(x) &= h(x), && \text{(Find a solution of an equation)}\\
f(x) &= 0, && \text{(Find a zero of the function } f\text{)}\\
x &= f(x), && \text{(Find a fixed point of the function } f\text{)}
\end{aligned}
$$

Definition

A zero of a function f is a solution of the equation $f(x) = 0$.
A fixed point of a function f is a solution of the equation $x = f(x)$.

Beispiel: Eine Aufgabe, drei Schreibweisen

Equation—Zero—Fixed Point

Version 1

$$3\cos x = \log x$$

We are looking for the solution to an Equation in the form $g(x) = h(x)$.

Transformed—Version 2

$$3\cos x - \log x = 0$$

We are looking for zeros of the function $f(x) = 3\cos x - \log x$.

Transformed—Version 3

$$x = \arccos\frac{\log x}{3}$$

We are looking for a fixed point of the function $\phi(x) = \arccos\frac{\log x}{3}$

Depending on the formulation, there are different suitable solution methods

A Note on Notation

often a little incomplete due to lack of space on the slides

The slides assume that you ...

- can infer from the context: domain, codomain and image of f;
- can distinguish between *name*, *value*, and *formula* of a function;
- know about various standard ways for denoting functions.

Two examples of a more complete notation

Name, domain, codomain, arrow notation

find zeros of the function $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto 3\cos x - \log x$

Name, functional notation, domain

find zeros of the function f given by $f(x) = 3\cos x - \log x$ for $x \in \mathbb{R}^+$

Types of Equations, Solvability

linear, non-linear, polynomial, algebraic, transcendental

polynomial equations

- linear $8x + 13 = 0$
- quadratic $x = 1 - x^2$
- cubic $x^3 + px^2 + qx + r = 0$
- etc. $\ldots$

algebraic equations $\sqrt{1+x} = x^3$
contain only elementary operations $(+, -, *, /,$ powers, $\sqrt{\,})$

transcendental equations $3\cos x = \log x$
contain functions like $\sin, \exp, \log$

Transcendental equations and polynomial equations of degree five and higher cannot normally be solved by a finite number of elementary arithmetic operations.

Numerical methods, however, provide approximations that gradually, with ever increasing accuracy, approach the solutions.

Vokabelheft

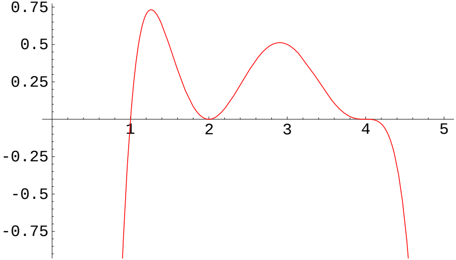
Machen Sie sich rasch mit englischen Fachbegriffen vertraut (auch wichtig zum Verstehen der MATLAB-Hilfe oder von Internet-Seiten)

root of an equation	Lösung einer Gleichung (auch im Deutschen heißen Lösungen, speziell polynomialer Gleichungen, Wurzeln)
root-finding algorithm	Verfahren zur Nullstellensuche
zeros (fixed points) of a function	Nullstellen (Fixpunkte) einer Funktion
multiple zeros	mehrfache Nullstellen
a quadratic / cubic / quartic	Ein quadratisches / kubisches Polynom, einPolynom vierten Grades

Multiple Zeros

Zeros of multiplicity one, two and three of the polynomial

$$-\frac{1}{4}(x-4)^3\,(x-2)^2\,(x-1)$$



Definition

A zero x of a function f has multiplicity exactly n , if simultaneously

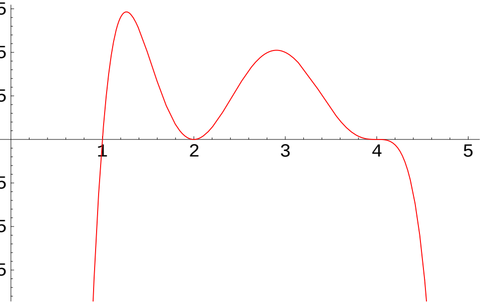
$$f(x)=0,\ f'(x)=0,\ f''(x)=0,\ldots,\ f^{(n-1)}(x)=0 \text{ and } f^{(n)}(x)\neq 0\ .$$

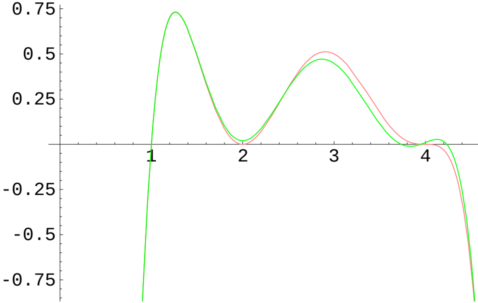
Ill-Conditioned Problems

Definition: Small changes in the data → major changes in the result

The numerical computation of multiple zeros is extremely sensitive to small changes in the polynomial coefficients. Consequence:

- Roundoff errors have a drastic effect.
- Zeros disappear, shift or multiply.





Unsuitable solution methods

Even with a numerically benign problem, an unsuitable solution method can give grossly inaccurate results.

We are looking for the smaller solution of $x^2 - 12345678x + 9 = 0$

The well-known formula

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

produces

Sharp EL-506 S	0
TI-36X Solar	0
TI Programmable 58	$0,000001$
Java, Datentyp double	7.292255...e-7
MS Calculator V.5	7.2900005977...e-7

Explanation: subtracting two nearly equal values $\longrightarrow$ Cancellation of significant digits!

Numerically Accurate Methods

for the smaller root of $x^2 - 12345678x + 9$

- The "correct" formula for x_1 and x_2

$$x_1 = -\frac{p}{2} - (\operatorname{sgn} p)\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \qquad x_2 = \frac{q}{x_1}$$

- Sove for the linear term $\longrightarrow$ Fixed-point problem, iteration.

$$x = \frac{x^2 + 9}{12345678}$$

The usual solution formula is prone to to subtractive cancellation of significant digits. Sometimes a numerical solution makes more sense.

Cubic Equation: Do you want to evaluate this formula?

For cubics, too, there is an explicit, but only partially useful solution formula. One of the three solutions of

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

is given by

$$
\begin{aligned}
x \;=\; \frac{1}{6}\Bigg(& -2\,p \\
& + \frac{2^{\frac{4}{3}}\,\left(p^2 - 3\,q\right)}{\left(-2\,p^3 + 9\,p\,q - 27\,r + \sqrt{-4\left(p^2 - 3\,q\right)^3 + \left(2\,p^3 - 9\,p\,q + 27\,r\right)^2}\right)^{\frac{1}{3}}} \\
& + \; 2^{\frac{2}{3}}\left(-2\,p^3 + 9\,p\,q - 27\,r + \sqrt{-4\left(p^2 - 3\,q\right)^3 + \left(2\,p^3 - 9\,p\,q + 27\,r\right)^2}\right)^{\frac{1}{3}}\Bigg)
\end{aligned}
$$

Explizit expressions for roots of cubics (don't even think of quartics) are rather cumbersome—there are much simpler numerical methods.

Example: Dissoziation of an Acid

Described by the equation

$$x^2 + K_s x - K_s c_0 = 0 \qquad \text{with} \begin{cases} x & \text{concentration of } H^+\text{- ions} \\ c_0 & \text{initial concentration of the acid} \\ K_s & \text{acid dissociation constant} \end{cases}$$

Two possible transformations to fixed-point equations

$$\begin{aligned} K_s x &= K_s c_0 - x^2 \\ x &= c_0 - \frac{x^2}{K_s} \\ x &\approx c_0 \end{aligned}$$

(for $K_s \gg c_0$, strong acid)

$$\begin{aligned} x^2 &= K_s c_0 - K_s x \\ x &= \sqrt{K_s(c_0 - x)} \\ x &\approx \sqrt{K_s c_0} \end{aligned}$$

(for $K_s \ll c_0$, weak acid)

In the case of strong or weak acids, the classic solution formula is neither necessary nor useful.

Computer-assisted

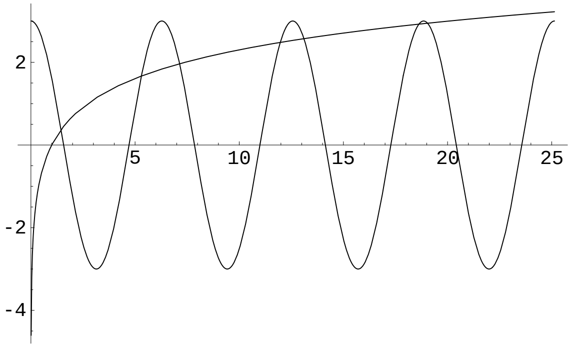
- Draw graph of function, locate zero, zoom in, read of value
- Tabulate function, look for zero crossings, refine table systematically
- Spreadsheet (e.g., LibreOfficeCalc): Solver
- MATLAB: `fzero, roots`

Classic methods

- interval bisection
- secant method (inkluding Regula falsi and its variants)
- Newton's method
- Fixed-point iterations

$3\cos x = \log x$

Graphic solution: A picture says more than a thousand formulas

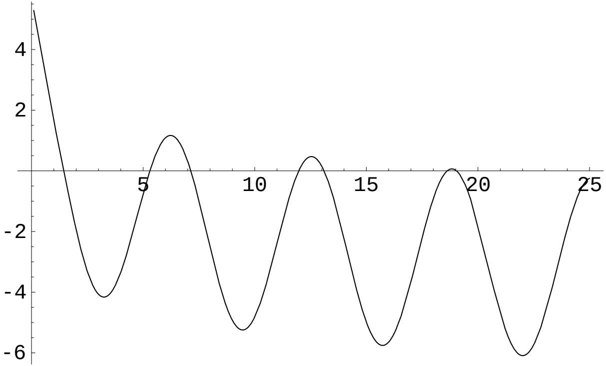


The x-values at the points of intersection points of intersection or contact of the two graphs $g(x) = 3\cos x$ and $h(x) = \log x$ are the solutions of the equation $g(x) = h(x)$.

This representation is well suited if the two functions are simple and easy to draw.

$f(x) = 3\cos x - \log x$

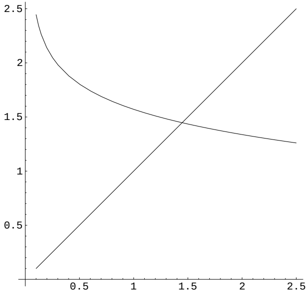
The zeros can be read off the function graph



The zeros of f are the solutions of the equation $f(x) = 0$.

$\phi(x) = \arccos(\log(x)/3)$

Good pictures come in threes. Thus, a fixed-point representation.
Beware! This transformation changes the set of solutions.



For a fixed point x of a function ϕ, the graph intersects (or touches) the line $y = x$ in the point $(x|x)$.
The fixed point of ϕ corresponds to the zero of f close to 1.4. There are no other fixed points of ϕ. This transformation of the original equation looses all the other solutions of the original problem!

Interval Bisection

- Interval bisection is a simple and robust method for finding zeros.
- It starts with an interval in which the function has a zero.
- It divides the interval in the middle and selects the half which contains the zero.
- It repeats this step until the desired accuracy is reached.

Bisection, more formalized

Input

A funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, two values a and b with $f(a) \cdot f(b) < 0$, an accuracy threshold $\epsilon > 0$.

Output

For f continuous in the interval $a \leq x \leq b$, this algorithm finds an approximation c to a zero x_0 of f with accuracy $|c - x_0| < \epsilon$.

Algorithm

Repeat
  $c \leftarrow (a + b)/2$
  if $f(a) \cdot f(c) < 0$
    $b \leftarrow c$
  else
    $a \leftarrow c$
until $|b - a| < \epsilon$ or $f(c) = 0$

Intermediate Value Theorem

A theorem from real analysis provides the theoretical justification for the method

If a function f is continuous on a closed interval $[a, b]$, then it takes on any given value between $f(a)$ and $f(b)$.

Corollary (Bolzano's theorem):

If a continuous function has opposite signs at the endpoints of an interval $[a, b]$, it has a root in that interval.

Konvergenzgeschwindigkeit

Wie rasch findet Intervallhalbierung eine Nullstelle?

- Intervallhalbierung liefert ein Intervall $[a, b]$, in dem die Nullstelle x liegen muss.
- Die beste Schätzung für den Wert x ist der Mittelpunkt des Intervalls.
- Der maximale Fehler beträgt $(b - a)/2$.
- Diese Fehler-Schranke halbiert sich bei jedem Schritt.
- Weil $2^{10} = 1024 \approx 1000$, reduzieren zehn Schritte die Schranke um einen Faktor 1000, das entspricht drei Dezimalstellen Genauigkeitsgewinn.

Intervallhalbierung braucht etwas mehr als drei Schritte pro Dezimalstelle Genauigkeitsgewinn

Regula Falsi

- Die Regula Falsi ist ein Verfahren zur numerischen Berechnung von Nullstellen.
- Es läuft ähnlich ab wie die Intervallhalbierung. Einziger Unterschied: Die Regula Falsi teilt das Intervall nicht in der Mitte, sondern berechnet
$$c = a - f(a)\frac{a-b}{f(a)-f(b)}$$
- Interpretation: Regula Falsi ersetzt die Funktion f im Bereich $[a, b]$ durch eine eine Gerade. Der berechnete Wert c ist deren Nullstelle.
- Trotz dieser Verbesserung konvergiert sie letzlich nicht wesentlich schneller als Intervallhalbierung.
- Moderne Versionen der Regula Falsi (Illinois-,Pegasus- und Anderson/Björk-Verfahren) konvergieren deutlich schneller (höhere Konvergenzordnung – siehe später).

Regula falsi (algorithmische Beschreibung)

Angabe und Ergebnis

Eine Funktion f, zwei Werte a und b mit $f(a) \cdot f(b) < 0$ und eine Genauigkeitsschranke $\epsilon > 0$. Ist $f(x)$ im Intervall $a \leq x \leq b$ stetig, dann findet dieser Algorithmus die Näherung c an eine Nullstelle c_0 von f mit Genauigkeit $|c - c_0| < \epsilon$

Algorithmus:

Wiederhole
  setze $c \leftarrow a - f(a)\frac{a-b}{f(a)-f(b)}$
  falls $f(b) \cdot f(c) < 0$
    setze $a \leftarrow b$
  sonst
    (Originalversion) nix
    (Illinois-Variante) reduziere $f(a)$ auf $\frac{1}{2}f(a)$
  setze $b \leftarrow c$
bis $|b - a| < \epsilon$ oder $f(c) = 0$

Sekantenmethode

Rechnet wie Regula falsi mit linearer Interpolation, verzichtet aber auf den Einschluss der Nullstelle

Gegeben

eine Funktion $f(x)$ und zwei Startwerte $x^{(0)}$ und $x^{(1)}$.

Ergebnis

falls konvergent, eine Nullstelle von f.

Iterationsvorschrift

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - f(x^{(k)}) \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})} \qquad \text{für } k = 1, 2, 3 \ldots$$

Meist schneller als Intervallhalbierung, dafür keine Konvergenz-Garantie!

Newton's Method

(manche sagen auch Newton-Raphson-Verfahren dazu)

Gegeben

eine differenzierbare Funktion $f(x)$ und ein Startwert $x^{(0)}$.

Ergebnis

falls konvergent, eine Nullstelle von f.

Iterationsvorschrift

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \qquad \text{für } k = 0, 1, 2 \dots$$

Isaac Newton schreibt seine Methode 1669 nieder, allerdings in ganz anderer Formulierung – nur für Polynome und ohne Differentialrechnung. Joseph Raphson veröffentlicht 1690 eine vereinfachte Darstellung. Erst 1740 beschreibt Thomas Simpson das allgemeine iterative Verfahren, so wie wir es kennen.

Fixed-Point Iteration (in $\mathbb{R}$ and $\mathbb{R}^n$)

The basic idea behind many iterative methods

Gegeben

eine stetige Funktion $\mathbf{\Phi}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und ein Startwert $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Ergebnis

Falls konvergent, liefert die Fixpunkt-Iteration einen Fixpunkt $\mathbf{x}^\star$ von $\mathbf{\Phi}$.

Iterationsvorschrift

für $k = 0, 1, 2 \ldots$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}^{(k)})$$

Viele numerische Verfahren lassen sich als Fixpunkt-Iterationen formulieren. Die Theorie der Fixpunkt-Iteration ist daher von grundlegender Bedeutung.

Schreibweise für vektorwertige Funktionen

Vektoren und vektorwertige Funktionen fett gedruckt – aber in dieser Einheit sind die meisten Funktionen noch skalar. . .

Reellwertige Funktionen, Skalare: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$
Vektorwertige Funktionen, Vektoren: $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$

Komponenten eines Vektors $\in \mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{oder } \mathbf{x}^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]$$

Normalerweise ist mit $\mathbf{x}$ ein Spalten-, mit $\mathbf{x}^T$ ein Zeilenvektor gemeint.

Iterationsindizes sind (um sie von Vektorkomponenten zu unterscheiden) in der Regel hochgestellt, in Klammern: $\mathbf{x}^{(k)}, k = 0, 1, 2 \dots$

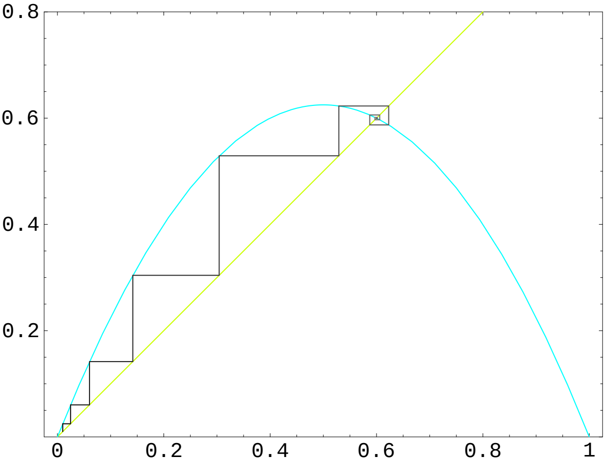
Fixed-point-Iteration, visualized

Move horizoltally to $y = x$, vertically to f!

Fixpunkt-Iteration

$$x = ax(1 - x)$$

graphisch veranschaulicht für $a = 5/2$
Startwert $x = 1/100$



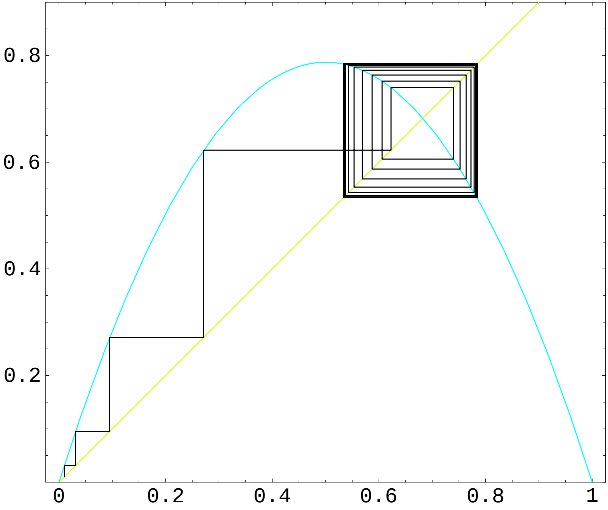
Fixpunkt-Iteration

$$x = ax(1-x)$$

für $a = 3{,}15$
Startwert
$x = 1/100$

konvergiert zu
Zyklus
mit Periode 2

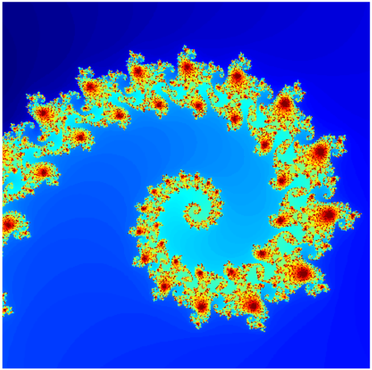
weitere Beispiele:
Logo des Lehrstuhls



Das Logo unseres Lehstuhls symbolisiert chaotische Dynamik :-)

Ergebnisse von Fixpunkt-Iterationen in $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$

Mandelbrot-Menge und Barnsleys Farn, dazu gibt MATLAB-Skripts



Ein Beispiel $x - \epsilon \sin x = m$

Die Kepler-Gleichung setzt verschiedene Parameter einer elliptischen Umlaufbahn in Beziehung

Angenommen, $\epsilon \ll 1$ und $m \geq 0$ sind gegeben; x ist gesucht.
Formulieren Sie selber Lösungswege

- graphische Darstellung: wo liegen überhaupt Lösungen?
- Durch Fixpunkt-Iteration
- Als Nullstellen-Aufgabe (hier lassen sich das Newtonsche Verfahren oder die Sekanten-Methode gut anwenden)

Fixpunkt-Verfahren für Kepler-Gleichung

findet Fixpunkt von $\phi(x) = m + \epsilon \sin x$

Konkret für $m = 2, \epsilon = 0{,}1$ und Startwert $x^{(0)} = 0$ ergibt sich

neue Näherung	$x^{(1)} = \phi(x^{(0)}) =$	2,00000 00000 00000 00000
und weiter...	$x^{(2)} = \phi(x^{(1)}) =$	2,09092 97426 82568 16954
	$x^{(3)} = \phi(x^{(2)}) =$	2,08677 52880 24968 62712
	$x^{(4)} = \phi(x^{(3)}) =$	2,08698 10132 82436 76955
	$x^{(5)} = \phi(x^{(4)}) =$	2,08697 08612 33421 23181
	$x^{(6)} = \phi(x^{(5)}) =$	2,08697 13622 99081 87912
	$x^{(7)} = \phi(x^{(6)}) =$	2,08697 13375 68639 67423

Die Anzahl richtiger Stelle nimmt konstant zu (hier $\approx$ 1–2 pro Iteration)

Newton-Verfahren für Kepler-Gleichung

findet Nullstelle von $f(x) = x - \epsilon \sin x - m$

$$f(x) = x - \epsilon \sin x - m \qquad \text{Funktion}$$

$$f'(x) = 1 - \epsilon \cos x \qquad \text{Ableitung}$$

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{x^{(n)} - \epsilon \sin x^{(n)} - m}{1 - \epsilon \cos x^{(n)}} \qquad \text{Iterationsvorschrift}$$

Konkret für $m = 2, \epsilon = 0{,}1$ und Startwert $x^{(0)} = 0$ ergibt sich

$$f(x^{(0)}) = -2 \qquad f'(x^{(0)}) = 0{,}9$$

neue Näherung $\quad x^{(1)} = 2{,}22222\,22222\,22222\,22222$

und weiter... $\quad x^{(2)} = 2{,}08767\,96060\,17866\,31513$

$$x^{(3)} = 2{,}08697\,13595\,13269\,54514$$

$$x^{(4)} = 2{,}08697\,13387\,31818\,75247$$

$$x^{(5)} = 2{,}08697\,13387\,31818\,73458$$

Die Anzahl richtiger Stellen nimmt immer rascher zu

Newton-Verfahren in Fixpunkt-Form

Auch das Newton-Verfahren ist ein Fixpunkt-Verfahren!

Fixpunkt-Gleichung

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Bitte verwechseln Sie nicht

Das Newton-Verfahren sucht eine Nullstelle einer Funktion f.
Das Newton-Verfahren wendet Fixpunkt-Iteration auf die Funktion ϕ an.

$$\phi(x) = x - f(x)/f'(x)$$

Sekantenmethode für Kepler-Gleichung

berechnet aus zwei alten Werten den nächsten

Wähle Startwerte $x^{(0)} = 0; \quad x^{(1)} = 2$

Nächster Wert $x^{(2)} = x^{(1)} - f(x^{(1)}) \dfrac{x^{(1)} - x^{(0)}}{f(x^{(1)}) - f(x^{(0)})}$

neue Näherung $\quad x^{(2)} = 2{,}09526\,07609\,21748\,27768$

und weiter... $\quad x^{(3)} = 2{,}08694\,09346\,18957\,85429$

$x^{(4)} = 2{,}08697\,13283\,07441\,26503$

$x^{(5)} = 2{,}08697\,13387\,31831\,86894$

$x^{(6)} = 2{,}08697\,13387\,31818\,73458$

Die Anzahl richtiger Stellen nimmt auch hier rasch zu

Die Sekantenmethode berechnet aus zwei Näherungen $x^{(0)}, x^{(1)}$ eine verbesserte Näherung, rechnet dann mit zwei neuen Näherungen weiter. Fasse die beiden Näherungen als Komponenten eines Vektors auf. Die Schreibweise

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 - f(x_2)\frac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)} \end{bmatrix}$$

formuliert die Sekantenmethode als zweidimensionale Fixpunkt-Iteration

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}^{(k)}) \quad \text{für } k = 0, 1, 2 \ldots$$

Reihenentwicklung

Nur damit Sie sehen: nicht alle Näherungsverfahren sind vom Typ der Fixpunkt-Iteration

- Reihenentwicklungen sind ein anderer Typ von Näherungsverfahren (die wir hier nicht weiter behandeln).
- Für die Kepler-Gleichung gilt (unter Vernachlässigung vierter und höherer Potenzen von ϵ):

$$x = m + \left(\epsilon - \frac{\epsilon^3}{8}\right)\sin(m) + \frac{\epsilon^2}{2}\sin(2m) + \frac{3\epsilon^3}{8}\sin(3m) + \ldots$$

- Je kleiner ϵ, desto genauer. Für zu große ϵ unbrauchbar.

Verfahren in der Übersicht

Vorteile, Nachteile

- Intervallhalbierung, Regula Falsi: Funktionieren garantiert bei stetigen Funktionen wenn Anfangsintervall Nullstelle einschließt. Langsame Konvergenz (es gibt deutlich schnellere Varianten).
- Sekantenmethode Schnellere Konvergenz als bei den beiden obigen Verfahren, wenn Funktion „gutartig“ (glatt) ist. Kann fehlschlagen.
- Newton-Raphson-Verfahren Noch schnellere Konvergenz bei glatten Funktionen. Braucht Ableitungen und gute Startwerte.
- Fixpunkt-Iteration Rasch und einfach, wenn komplizierte Terme in erster Näherung vernachlässigt werden können. Kein Kochrezept.

Rechenumgebungen wie MATLAB kombinieren trickreich mehrerere Verfahren.

Wiederholung, Fragenliste

Nichtlineare Gleichungen in einer Variablen

Was ist...

- eine lineare (nichtlineare, polynomiale, algebraische, transzendente) Gleichung?
- eine Nullstelle? ... mehrfache Nullstelle?
- ein Fixpunkt?

Wie geht...

- Intervallhalbierung?... Regula Falsi?
- Sekantenmethode?... Newton-Verfahren?

Theorie

- Wann, warum und wie schnell findet Intervallhalbierung garantiert eine Nullstelle?
- Iterationsvorschrift einer Fixpunkt-Iteration im $\mathbb{R}^n$

Eine Prüfungsfrage

Gesucht ist die Lösung der Gleichung

$$x \ln x = 8 \; .$$

Ordnen Sie zu: Welche Iterationsvorschrift entspricht welchem Verfahren?

A	$x^{(n+1)} = \dfrac{8}{\ln x^{(n)}}$	$\square$	Newton-Verf.
B	$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \dfrac{x^{(n)} \ln x^{(n)} - 8}{1 + \ln x^{(n)}}$	$\square$	Sekanten-Meth.
C	$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \dfrac{\left(x^{(n-1)} - x^{(n)}\right)\left(x^{(n)} \ln x^{(n)} - 8\right)}{x^{(n-1)} \ln x^{(n-1)} - x^{(n)} \ln x^{(n)}}$	$\square$	Fixpunkt-It.

Noch eine Prüfungsfrage

Die Funktion

$$\phi(x) = \frac{1}{6}\left(-x^3 + 2x^2 + 7x - 2\right)$$

hat Fixpunkte für $x = -1,\ +1$ und $+2$; sie hat eine Nullstelle nahe bei $x = \frac{1}{4}$.

1. Führen Sie für die drei verschiedenen Startwerte $x^{(0)} = -1{,}1; \quad x^{(0)} = +1{,}1$ und $x^{(0)} = 2{,}1$ jeweils einige Schritte der Fixpunkt-Iteration aus. Beschreiben Sie das Verhalten der Iterationen.
2. Finden Sie einen Näherungswert (vier korrekte Nachkommastellen) für die *Nullstelle* von ϕ mit dem Newtonschen Verfahren (Startwert 0).
3. Angenommen, Sie wollen durch Intervallhalbierung eine Nullstelle von ϕ finden, mit Fehler $\epsilon < 10^{-3}$. Sie beginnen mit dem Intervall $[0, 1]$. Wie viele Schritte brauchen Sie? Erklären Sie, warum.