Nichtlineare Gleichungen, Nullstellen, Fixpunkte

1. Vorlesung

170 021 Numerische Methoden I

Alexander Steinicke

Montanuniversität Leoben

5. Oktober 2023

Organisatorisches

- Die Termine der Übungsgruppe (ab nächster Woche)
  - Montag 16–18 Uhr
- Vorlesungsfolien, Skriptum und Übungsunterlagen finden Sie auf der Website (auch im Moodle-Kurs verlinkt):
  Moodle:
  `https://moodle.unileoben.ac.at/course/view.php?id=3250`
  Page: `https://angemath.unileoben.ac.at/lehre/numerische-methoden-i`
- Sonst noch Fragen oder Wünsche?

Organisatorisches

- Die Termine der Übungsgruppe (ab nächster Woche)
  - Montag 16–18 Uhr
- Vorlesungsfolien, Skriptum und Übungsunterlagen finden Sie auf der Website (auch im Moodle-Kurs verlinkt):
  Moodle:
  `https://moodle.unileoben.ac.at/course/view.php?id=3250`
  Page: `https://angemath.unileoben.ac.at/lehre/numerische-methoden-i`
- Sonst noch Fragen oder Wünsche?

Organisatorisches

- Die Termine der Übungsgruppe (ab nächster Woche)
  - Montag 16–18 Uhr
- Vorlesungsfolien, Skriptum und Übungsunterlagen finden Sie auf der Website (auch im Moodle-Kurs verlinkt):
  Moodle:
  `https://moodle.unileoben.ac.at/course/view.php?id=3250`
  Page: `https://angemath.unileoben.ac.at/lehre/numerische-methoden-i`
- Sonst noch Fragen oder Wünsche?

Ihre Betreuer in dieser LV

Wie Sie den LV-Leiter erreichen können

Dr. Dipl.-Ing. Alexander Steinicke
Lehrstuhl für Angewandte Mathematik
Sekretariat: Petra Pencz

Büro	TTZ, Peter-Tunner-Str. 25, 1. Stock Nordtrakt
E-Mail	petra.pencz@unileoben.ac.at
Telefon	402 1709
Sprechstunde	versuchen Sie es zu den üblichen Bürozeiten.


Technologie Transfer
Zentrum TTZ Leoben
Außeninstitut - ...
Parkplatz TTZ
Kaiserfeldgasse
Kaiserfeldgasse
Zentrum für angewandte
Technologie Leoben
BESCO
Franz-Josef-Straße
Mr. Dr. Hans Schenk
Stadtsaal der
Stadtgemeinde Leoben
Roseggerstraße
Ristorante Antonio

Lehrbücher

über MUL Onlinezugang verfügbar – nützen Sie die Download-Möglichkeit!

- Alfio Quarteroni, Fausto Saleri. *Wissenschaftliches Rechnen mit MATLAB*
- Wolfgang Dahmen, Arnold Reusken. *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*
- Thomas Huckle, Stefan Schneider. *Numerische Methoden*
- Michael Knorrenschild. *Numerische Mathematik*
- Robert Plato. *Numerische Mathematik kompakt*
- Hans Rudolf Schwarz, Norbert Köckler. *Numerische Mathematik*
- Günter Bärwolff. *Numerik für Ingenieure, Physiker und Informatiker* (in Kürze verfügbar)

Inhalt und Themen

13 Vorlesungseinheiten geplant

- Nichtlineare Gleichungen, Nullstellen, Fixpunkte
- Fixpunkt-Iterationen, ein- und mehrdimensional
- Lineare Gleichungssysteme
- Überbestimmte Systeme, Matrixzerlegungen, Datenmodelle
- Polynomiale Regression, Interpolation, numerische Integration
- Eigenwertaufgaben
- Gewöhnliche Differentialgleichungen
- Fourier-Analyse
- Iterative Gleichungslöser
- Inverse Probleme, Singulärwertzerlegung
- Partielle Differentialgleichungen

Hilfreich zu Wiederholen

- Differentialrechnung (ein. und mehrdimensional)
- Matrixalgebra und lineare Gleichungssysteme, Eigenwerte
- Integralrechnung
- Gewöhnliche Differentialgleichungen

Gliederung für heute

1. Einführung: Gleichungstypen, Grundbegriffe
   - Aufgabentypen: Gleichung, Nullstelle, Fixpunkt
   - mehrfache Nullstellen
   - Rundungsfehler, schlecht konditionierte Probleme
2. Numerische Lösungsverfahren
   - Graphische Lösung
   - Intervallhalbierung
   - Regula Falsi und Sekantenmethode
   - Newton-Verfahren
   - Fixpunkt-Iteration
   - Ein Beispiel – verschiedenen Verfahren
3. Zusammenfassung, Prüfungsfragen

Gliederung 1. Vorlesung

1. Einführung: Gleichungstypen, Grundbegriffe
   - Aufgabentypen: Gleichung, Nullstelle, Fixpunkt
   - mehrfache Nullstellen
   - Rundungsfehler, schlecht konditionierte Probleme
2. Numerische Lösungsverfahren
   - Graphische Lösung
   - Intervallhalbierung
   - Regula Falsi und Sekantenmethode
   - Newton-Verfahren
   - Fixpunkt-Iteration
   - Ein Beispiel – verschiedenen Verfahren
3. Zusammenfassung, Prüfungsfragen

Aufgabentypen

Gleichungen lassen sich in verschiedener Weise formulieren und lösen

Die Problemstellung

Gesucht ist ein x, für das gilt...

$$
\begin{aligned}
g(x) &= h(x), && \text{(Finden der Lösung einer Gleichung)} \\
f(x) &= 0, && \text{(Finden einer Nullstelle der Funktion } f\text{)} \\
x &= f(x), && \text{(Finden eines Fixpunktes der Funktion } f\text{)}
\end{aligned}
$$

Definition

Unter einer Nullstelle der Funktion f versteht man eine Lösung der Gleichung $f(x) = 0$.
Unter einem Fixpunkt der Funktion f versteht man eine Lösung der Gleichung $x = f(x)$.

Beispiel

Eine Aufgabe, mehrere Formulierungen

Erste Formulierung

$$3 \cos x = \log x$$

Gesucht ist die Lösung einer Gleichung in der Form $g(x) = h(x)$.

Umgeformt

$$3 \cos x - \log x = 0$$

Gesucht sind Nullstellen der Funktion $f(x) = 3 \cos x - \log x$.

Anders umgeformt

$$x = \arccos \frac{\log x}{3}$$

Gesucht ist ein Fixpunkt der Funktion $\phi(x) = \arccos \frac{\log x}{3}$

Je nach Formulierung gibt es unterschiedliche passende Lösungsverfahren

Beispiel

Eine Aufgabe, mehrere Formulierungen

Erste Formulierung

$$3 \cos x = \log x$$

Gesucht ist die Lösung einer Gleichung in der Form $g(x) = h(x)$.

Umgeformt

$$3 \cos x - \log x = 0$$

Gesucht sind Nullstellen der Funktion $f(x) = 3 \cos x - \log x$.

Anders umgeformt

$$x = \arccos \frac{\log x}{3}$$

Gesucht ist ein Fixpunkt der Funktion $\phi(x) = \arccos \frac{\log x}{3}$

Je nach Formulierung gibt es unterschiedliche passende Lösungsverfahren

Anmerkung zur Schreibweise von Funktionen

aus Platzgründen auf den Folien oft ein wenig unvollständig

Die Präsentationsfolien nehmen an, dass Sie...

- Definitions- und Wertemenge aus dem Kontext sinnvoll ergänzen;
- die Begriffe *Funktion, Funktionswert, Funktionsterm, Funktionsgraph, Funktionsgleichung, Zuordungsvorschrift* auseinanderhalten können.

Beispiele für ausführliche Schreibweise:

Funktionsname, Definitions- und Zielmenge, Zuordnungsvorschrift

gesucht sind Nullstellen der Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto 3\cos x - \log x$

Funktionsname, Funktionsgleichung, Definitionsmenge

gesucht sind Nullstellen der Funktion f, gegeben durch die Funktionsgleichung $f(x) = 3\cos x - \log x$ mit $x \in \mathbb{R}^+$

Arten von Gleichungen, Lösbarkeit

linear, nichtlinear, polynomial, algebraisch, transzendent

polynomiale Gleichungen

linear	$8x + 13 = 0$
quadratisch	$x = 1 - x^2$
kubisch	$x^3 + px^2 + qx + r = 0$
usw.	$\ldots$

algebraische Gleichungen $\sqrt{1+x} = x^3$

enthalten nur elementare Rechenoperationen $(+, -, *, /,$ Potenzen, $\sqrt{\ })$

transzendente Gleichungen $3\cos x = \log x$

enthalten Funktionen wie $\sin, \exp, \log$

Polynomiale Gleichungen ab dem fünften Grad und transzendente Gleichungen lassen sich gewöhnlich nicht durch eine endliche Zahl elementarer Rechenoperationen lösen.

Numerische Verfahren liefern aber Näherungen, die schrittweise, mit immer besserer Genauigkeit, die Lösungen anstreben.

Arten von Gleichungen, Lösbarkeit

linear, nichtlinear, polynomial, algebraisch, transzendent

polynomiale Gleichungen

linear	$8x + 13 = 0$
quadratisch	$x = 1 - x^2$
kubisch	$x^3 + px^2 + qx + r = 0$
usw.	$\ldots$

algebraische Gleichungen $\sqrt{1+x} = x^3$
enthalten nur elementare Rechenoperationen $(+, -, *, /,$ Potenzen, $\sqrt{\ })$

transzendente Gleichungen $3\cos x = \log x$
enthalten Funktionen wie $\sin, \exp, \log$

Polynomiale Gleichungen ab dem fünften Grad und transzendente Gleichungen lassen sich gewöhnlich nicht durch eine endliche Zahl elementarer Rechenoperationen lösen.
Numerische Verfahren liefern aber Näherungen, die schrittweise, mit immer besserer Genauigkeit, die Lösungen anstreben.

Arten von Gleichungen, Lösbarkeit

linear, nichtlinear, polynomial, algebraisch, transzendent

polynomiale Gleichungen

- linear $8x + 13 = 0$
- quadratisch $x = 1 - x^2$
- kubisch $x^3 + px^2 + qx + r = 0$
- usw. ...

algebraische Gleichungen $\sqrt{1+x} = x^3$
enthalten nur elementare Rechenoperationen $(+, -, *, /,$ Potenzen, $\sqrt{\ })$

transzendente Gleichungen $3\cos x = \log x$
enthalten Funktionen wie $\sin, \exp, \log$

Polynomiale Gleichungen ab dem fünften Grad und transzendente Gleichungen lassen sich gewöhnlich nicht durch eine endliche Zahl elementarer Rechenoperationen lösen.
Numerische Verfahren liefern aber Näherungen, die schrittweise, mit immer besserer Genauigkeit, die Lösungen anstreben.

Arten von Gleichungen, Lösbarkeit

linear, nichtlinear, polynomial, algebraisch, transzendent

polynomiale Gleichungen

linear	$8x + 13 = 0$
quadratisch	$x = 1 - x^2$
kubisch	$x^3 + px^2 + qx + r = 0$
usw.	...

algebraische Gleichungen $\sqrt{1+x} = x^3$
enthalten nur elementare Rechenoperationen $(+, -, *, /,$ Potenzen, $\sqrt{\ })$

transzendente Gleichungen $3\cos x = \log x$
enthalten Funktionen wie $\sin, \exp, \log$

Polynomiale Gleichungen ab dem fünften Grad und transzendente Gleichungen lassen sich gewöhnlich nicht durch eine endliche Zahl elementarer Rechenoperationen lösen.
Numerische Verfahren liefern aber Näherungen, die schrittweise, mit immer besserer Genauigkeit, die Lösungen anstreben.

Vokabelheft

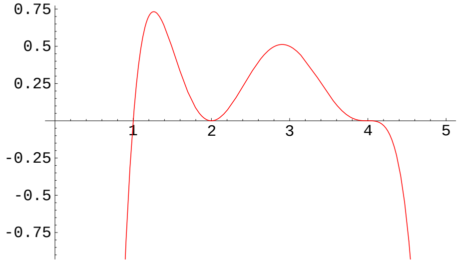
Machen Sie sich rasch mit englischen Fachbegriffen vertraut (auch wichtig zum Verstehen der MATLAB-Hilfe oder von Internet-Seiten)

root of an equation	Lösung einer Gleichung (auch im Deutschen heißen Lösungen, speziell polynomialer Gleichungen, Wurzeln)
root-finding algorithm	Verfahren zur Nullstellensuche
zeros (fixed points) of a function	Nullstellen (Fixpunkte) einer Funktion
multiple zeros	mehrfache Nullstellen
a quadratic / cubic / quartic	Ein quadratisches / kubisches Polynom, einPolynom vierten Grades

Mehrfache Nullstellen

Einfache, doppelte und dreifache Nullstellen des Polynoms

$$-\frac{1}{4}(x-4)^3\,(x-2)^2\,(x-1)$$



Definition

Eine Funktion f hat bei x eine genau *n-fache Nullstelle*, wenn zugleich

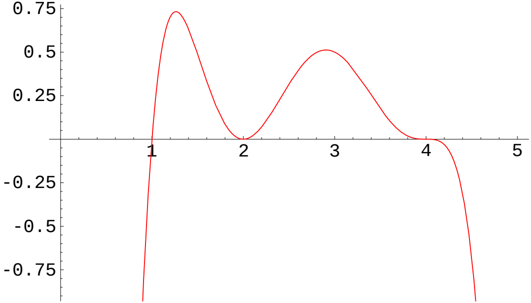
$$f(x)=0,\ f'(x)=0,\ f''(x)=0,\ldots,\ f^{(n-1)}(x)=0 \text{ und } f^{(n)}(x)\neq 0\ .$$

Schlecht konditioniertes Problem

Definition: Kleine Änderungen der Daten $\rightarrow$ starke Änderungen im Ergebnis

Die numerische Berechnung mehrfacher Nullstellen ist extrem anfällig gegenüber kleinen Änderungen der Polynom-Koeffizienten. Konsequenz:

- Rundungsfehler wirken sich drastisch aus.
- Nullstellen verschwinden, verschieben oder vermehren sich.

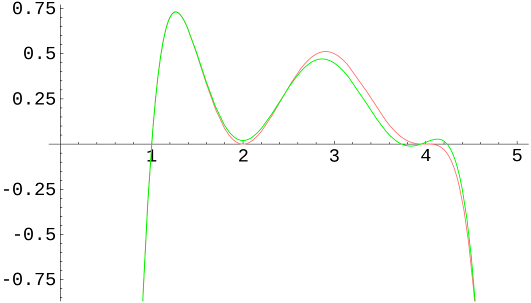


Schlecht konditioniertes Problem

Definition: Kleine Änderungen der Daten $\rightarrow$ starke Änderungen im Ergebnis

Die numerische Berechnung mehrfacher Nullstellen ist extrem anfällig gegenüber kleinen Änderungen der Polynom-Koeffizienten. Konsequenz:

- Rundungsfehler wirken sich drastisch aus.
- Nullstellen verschwinden, verschieben oder vermehren sich.



Ungeeignete Lösungsverfahren

Auch bei einem numerisch an sich gutartigem Problem können Rundungsfehler in einer ungeeigneten Lösungsmethode ungenaue Resultate liefern.

Gesucht ist die kleinere Lösung von $x^2 - 12345678x + 9 = 0$

Die gängige Lösungsformel

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

liefert folgende Resultate:

Sharp EL-506 S	0
TI-36X Solar	0
TI Programmable 58	$0,000001$
Java, Datentyp double	7.292255...e-7
MS Calculator V.5	7.2900005977...e-7

Bei Subtraktion annähernd gleicher Werte $\longrightarrow$ Auslöschung signifikanter Stellen!

Ungeeignete Lösungsverfahren

Auch bei einem numerisch an sich gutartigem Problem können Rundungsfehler in einer ungeeigneten Lösungsmethode ungenaue Resultate liefern.

Gesucht ist die kleinere Lösung von $x^2 - 12345678x + 9 = 0$

Die gängige Lösungsformel

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

liefert folgende Resultate:

Sharp EL-506 S	0
TI-36X Solar	0
TI Programmable 58	$0,000001$
Java, Datentyp double	7.292255...e-7
MS Calculator V.5	7.2900005977...e-7

Bei Subtraktion annähernd gleicher Werte $\longrightarrow$ Auslöschung signifikanter Stellen!

Ungeeignete Lösungsverfahren

Auch bei einem numerisch an sich gutartigem Problem können Rundungsfehler in einer ungeeigneten Lösungsmethode ungenaue Resultate liefern.

Gesucht ist die kleinere Lösung von $x^2 - 12345678x + 9 = 0$

Die gängige Lösungsformel

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

liefert folgende Resultate:

Sharp EL-506 S	0
TI-36X Solar	0
TI Programmable 58	$0,000001$
Java, Datentyp double	7.292255...e-7
MS Calculator V.5	7.2900005977...e-7

Bei Subtraktion annähernd gleicher Werte $\longrightarrow$ Auslöschung signifikanter Stellen!

Ungeeignete Lösungsverfahren

Auch bei einem numerisch an sich gutartigem Problem können Rundungsfehler in einer ungeeigneten Lösungsmethode ungenaue Resultate liefern.

Gesucht ist die kleinere Lösung von $x^2 - 12345678x + 9 = 0$

Die gängige Lösungsformel

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

liefert folgende Resultate:

Sharp EL-506 S	0
TI-36X Solar	0
TI Programmable 58	$0,000001$
Java, Datentyp double	7.292255...e-7
MS Calculator V.5	7.2900005977...e-7

Bei Subtraktion annähernd gleicher Werte $\longrightarrow$ Auslöschung signifikanter Stellen!

Ungeeignete Lösungsverfahren

Auch bei einem numerisch an sich gutartigem Problem können Rundungsfehler in einer ungeeigneten Lösungsmethode ungenaue Resultate liefern.

Gesucht ist die kleinere Lösung von $x^2 - 12345678x + 9 = 0$

Die gängige Lösungsformel

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

liefert folgende Resultate:

Sharp EL-506 S	0
TI-36X Solar	0
TI Programmable 58	$0,000001$
Java, Datentyp double	7.292255...e-7
MS Calculator V.5	7.2900005977...e-7

Bei Subtraktion annähernd gleicher Werte $\longrightarrow$ Auslöschung signifikanter Stellen!

Ungeeignete Lösungsverfahren

Auch bei einem numerisch an sich gutartigem Problem können Rundungsfehler in einer ungeeigneten Lösungsmethode ungenaue Resultate liefern.

Gesucht ist die kleinere Lösung von $x^2 - 12345678x + 9 = 0$

Die gängige Lösungsformel

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

liefert folgende Resultate:

Sharp EL-506 S	0
TI-36X Solar	0
TI Programmable 58	$0,000001$
Java, Datentyp double	7.292255... e-7
MS Calculator V.5	7.2900005977... e-7

Bei Subtraktion annähernd gleicher Werte $\longrightarrow$ Auslöschung signifikanter Stellen!

Geeignete Lösungsverfahren

für die betragskleinere Wurzel von $x^2 - 12345678x + 9 = 0$

- Die „richtige" Lösungsformel für x_1 und x_2

$$x_1 = -\frac{p}{2} - (\operatorname{sgn} p)\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \qquad x_2 = \frac{q}{x_1}$$

- Auflösen nach nach dem linearen Term $\longrightarrow$ Fixpunkt-Gleichung, Iteration

$$x = \frac{x^2 + 9}{12345678}$$

Die klassischen Lösungsformel kann zu Auslöschung signifikanter Stellen (Rundungsfehler) führen. Manchmal ist eine numerische Lösung sinnvoller.

Kubische Gleichung: Lösungsformel (??)

Auch für kubische Gleichungen gibt es eine explizite, aber nur bedingt brauchbare Lösungsformel. Es lautet eine der drei Lösungen von

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{6}\Bigg(-2\,p \\ &+ \frac{2^{\frac{4}{3}}\,\left(p^2 - 3\,q\right)}{\left(-2\,p^3 + 9\,p\,q - 27\,r + \sqrt{-4\,(p^2-3\,q)^3 + (2\,p^3 - 9\,p\,q + 27\,r)^2}\right)^{\frac{1}{3}}} \\ &+ 2^{\frac{2}{3}}\left(-2\,p^3 + 9\,p\,q - 27\,r + \sqrt{-4\,(p^2-3\,q)^3 + (2\,p^3 - 9\,p\,q + 27\,r)^2}\right)^{\frac{1}{3}}\Bigg) \end{aligned}$$

Die expliziten Lösungsformeln für kubische Gleichungen sind sehr umständlich – es gibt einfache numerische Verfahren.

Beispiel: Dissoziation einer Säure

Es gilt die Gleichung

$$x^2 + K_s x - K_s c_0 = 0 \qquad \text{mit} \begin{cases} x & \text{Konzentration der } H^+\text{- Ionen} \\ c_0 & \text{Anfangskonzentration der Säure} \\ K_s & \text{Säuredissoziationskonstante} \end{cases}$$

Zwei mögliche Umformungen zu Fixpunkt-Gleichungen

$$\begin{aligned} K_s x &= K_s c_0 - x^2 \\ x &= c_0 - \frac{x^2}{K_s} \\ x &\approx c_0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x^2 &= K_s c_0 - K_s x \\ x &= \sqrt{K_s(c_0 - x)} \\ x &\approx \sqrt{K_s c_0} \end{aligned}$$

(für $K_s \gg c_0$, starke Säuren) (für $K_s \ll c_0$, schwache Säuren)

Bei starken oder schwachen Säuren ist die klassische Lösungsformel weder notwendig noch sinnvoll.

Gliederung 1. Vorlesung

1. Einführung: Gleichungstypen, Grundbegriffe
   - Aufgabentypen: Gleichung, Nullstelle, Fixpunkt
   - mehrfache Nullstellen
   - Rundungsfehler, schlecht konditionierte Probleme
2. Numerische Lösungsverfahren
   - Graphische Lösung
   - Intervallhalbierung
   - Regula Falsi und Sekantenmethode
   - Newton-Verfahren
   - Fixpunkt-Iteration
   - Ein Beispiel – verschiedenen Verfahren
3. Zusammenfassung, Prüfungsfragen

Numerische Lösungsverfahren

Am Computer

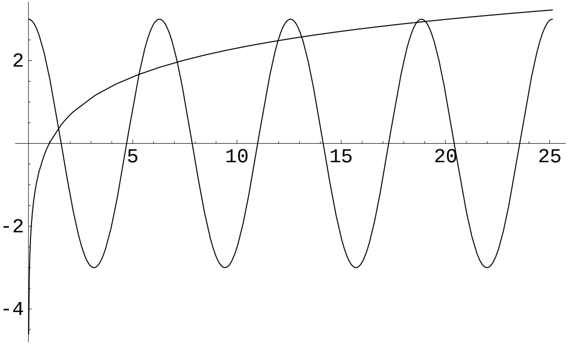
- Graphische Lösung, Zoomen in Funktionsgraph
- Systematisches Einsetzen in Wertetabelle
- Excel: Zielwertsuche
- MATLAB: `fzero, roots`

Klassische Methoden

- Intervallhalbierung
- Sekantenmethode (inklusive Regula falsi und Varianten)
- Newton-Verfahren
- Fixpunkt-Iteration

$3\cos x = \log x$

Graphische Lösung: Ein Bild sagt mehr als tausend Formeln

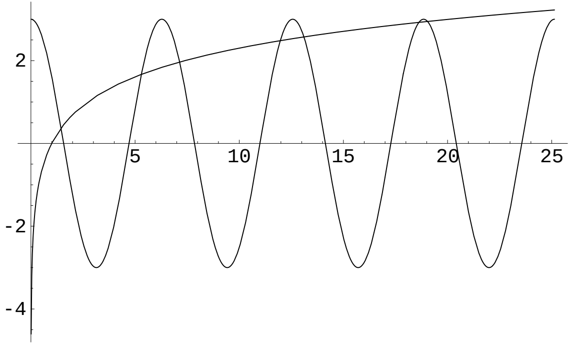


Den x-Werten der Schnittpunkte der beiden Funktionsgraphen $g(x) = 3\cos x$ und $h(x) = \log x$ entsprechen die Lösungen der Gleichung $g(x) = h(x)$.

Diese Darstellung eignet sich gut, wenn linke und rechte Seite „einfach“ zu zeichnen sind

$3\cos x = \log x$

Graphische Lösung: Ein Bild sagt mehr als tausend Formeln

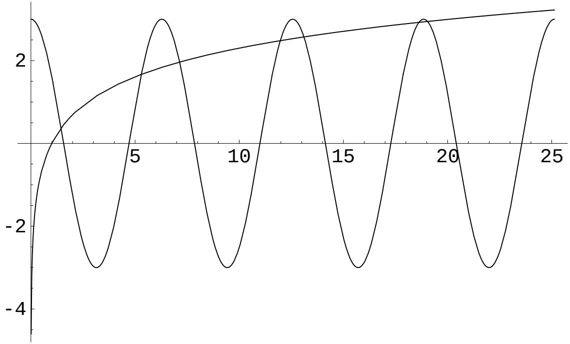


Den x-Werten der Schnitt- oder Berührpunkte der beiden Funktionsgraphen $g(x) = 3\cos x$ und $h(x) = \log x$ entsprechen die Lösungen der Gleichung $g(x) = h(x)$.

Diese Darstellung eignet sich gut, wenn linke und rechte Seite „einfach“ zu zeichnen sind

$3\cos x = \log x$

Graphische Lösung: Ein Bild sagt mehr als tausend Formeln

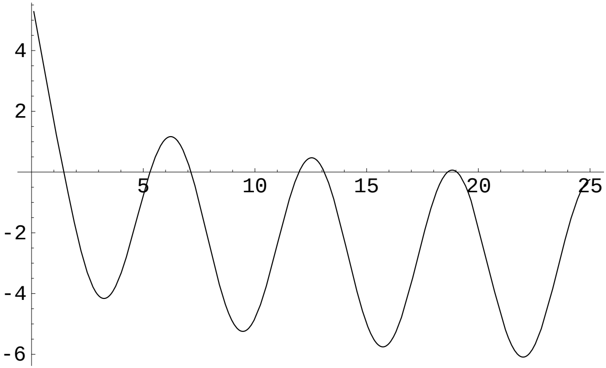


Den x-Werten der Schnitt- oder Berührpunkte der beiden Funktionsgraphen $g(x) = 3\cos x$ und $h(x) = \log x$ entsprechen die Lösungen der Gleichung $g(x) = h(x)$.

Diese Darstellung eignet sich gut, wenn linke und rechte Seite „einfach" zu zeichnen sind

$f(x) = 3\cos x - \log x$

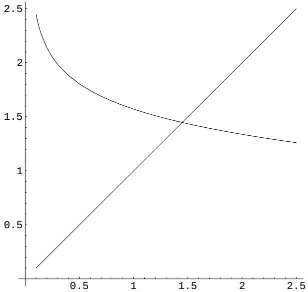
Am Funktionsgraph lassen sich die Nullstellen ablesen



Die Nullstellen von f sind die Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$.

$\phi(x) = \arccos(\log(x)/3)$

Aller guten Bilder sind drei: Fixpunkt-Aufgabe.
Achtung! Umformung ändert hier die Lösungsmenge.

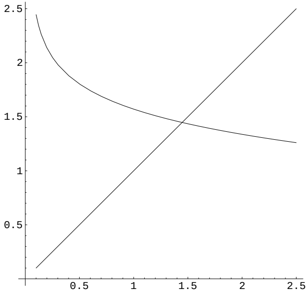


Ist x ein Fixpunkt der Funktion ϕ, dann schneidet der Funktionsgraph im Punkt $(x|x)$ die erste Mediane.

Der Fixpunkt von ϕ entspricht der Nullstelle von f in der Nähe von 1,4. Weitere Fixpunkte von ϕ gibt es nicht. Durch die Umformulierung sind Lösungen der ursprünglichen Gleichung verlorengegangen!

$\phi(x) = \arccos(\log(x)/3)$

Aller guten Bilder sind drei: Fixpunkt-Aufgabe.
Achtung! Umformung ändert hier die Lösungsmenge.

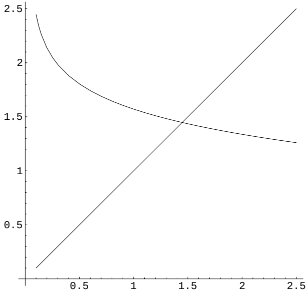


Ist x ein Fixpunkt der Funktion ϕ, dann schneidet der Funktionsgraph im Punkt $(x|x)$ die erste Mediane. (oder berührt sie dort)

Der Fixpunkt von ϕ entspricht der Nullstelle von f in der Nähe von 1,4. Weitere Fixpunkte von ϕ gibt es nicht. Durch die Umformulierung sind Lösungen der ursprünglichen Gleichung verlorengegangen!

$\phi(x) = \arccos(\log(x)/3)$

Aller guten Bilder sind drei: Fixpunkt-Aufgabe.
Achtung! Umformung ändert hier die Lösungsmenge.



Ist x ein Fixpunkt der Funktion ϕ, dann schneidet der Funktionsgraph im Punkt $(x|x)$ die erste Mediane. (oder berührt sie dort)
Der Fixpunkt von ϕ entspricht der Nullstelle von f in der Nähe von 1,4. Weitere Fixpunkte von ϕ gibt es nicht. Durch die Umformulierung sind Lösungen der ursprünglichen Gleichung verlorengegangen!

Intervallhalbierung

- Intervallhalbierung ist ein einfaches und robustes Verfahren zum Finden von Nullstellen.
- Es beginnt mit einem Intervall, in dem die Funktion eine Nullstelle hat.
- Es teilt das Intervall in der Mitte und wählt jene Hälfte, in der eine Nullstelle liegt.
- Es wiederholt diesen Schritt bis zur gewünschten Genauigkeit

Intervallhalbierung, etwas formaler

Gegeben:

eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zwei Werte a und b mit $f(a) \cdot f(b) < 0$, eine Genauigkeitsschranke $\epsilon > 0$.

Ergebnis:

Ist f im Intervall $a \leq x \leq b$ stetig, dann findet dieser Algorithmus die Näherung c an eine Nullstelle x_0 von f mit Genauigkeit $|c - x_0| < \epsilon$.

Algorithmus:

```
Wiederhole
   setze c = (a + b)/2
   falls f(a) · f(c) < 0
      setze b ← c
   sonst
      setze a ← c
bis |b − a| < ε oder f(c) = 0
```

Zwischenwertsatz

Ein Satz aus der reellen Analysis liefert die theoretische Begründung des Verfahrens

Eine Funktion f, die auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig ist, nimmt in diesem Intervall auch jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Korollar:

Eine in einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetige Funktion f, welche für $x = a$ negativ, für $x = b$ positiv ist (oder umgekehrt), hat mindestens eine Nullstelle in diesem Intervall.

Obwohl: Eigentlich ist es umgekehrt. Das Verfahren der Intervallhalbierung dient zum Beweis des Zwischenwertsatzes

Zwischenwertsatz

Ein Satz aus der reellen Analysis liefert die theoretische Begründung des Verfahrens

Eine Funktion f, die auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig ist, nimmt in diesem Intervall auch jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Korollar:

Eine in einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetige Funktion f, welche für $x = a$ negativ, für $x = b$ positiv ist (oder umgekehrt), hat mindestens eine Nullstelle in diesem Intervall.

Obwohl: Eigentlich ist es umgekehrt. Das Verfahren der Intervallhalbierung dient zum Beweis des Zwischenwertsatzes

Konvergenzgeschwindigkeit

Wie rasch findet Intervallhalbierung eine Nullstelle?

- Intervallhalbierung liefert ein Intervall $[a, b]$, in dem die Nullstelle x liegen muss.
- Die beste Schätzung für den Wert x ist der Mittelpunkt des Intervalls.
- Der maximale Fehler beträgt $(b - a)/2$.
- Diese Fehler-Schranke halbiert sich bei jedem Schritt.
- Weil $2^{10} = 1024 \approx 1000$, reduzieren zehn Schritte die Schranke um einen Faktor 1000, das entspricht drei Dezimalstellen Genauigkeitsgewinn.

Intervallhalbierung braucht etwas mehr als drei Schritte pro Dezimalstelle Genauigkeitsgewinn

Konvergenzgeschwindigkeit

Wie rasch findet Intervallhalbierung eine Nullstelle?

- Intervallhalbierung liefert ein Intervall $[a, b]$, in dem die Nullstelle x liegen muss.
- Die beste Schätzung für den Wert x ist der Mittelpunkt des Intervalls.
- Der maximale Fehler beträgt $(b - a)/2$.
- Diese Fehler-Schranke halbiert sich bei jedem Schritt.
- Weil $2^{10} = 1024 \approx 1000$, reduzieren zehn Schritte die Schranke um einen Faktor 1000, das entspricht drei Dezimalstellen Genauigkeitsgewinn.

Intervallhalbierung braucht etwas mehr als drei Schritte pro Dezimalstelle Genauigkeitsgewinn

Regula Falsi

- Die Regula Falsi ist ein Verfahren zur numerischen Berechnung von Nullstellen.
- Es läuft ähnlich ab wie die Intervallhalbierung. Einziger Unterschied: Die Regula Falsi teilt das Intervall nicht in der Mitte, sondern berechnet
$$c = a - f(a)\frac{a-b}{f(a)-f(b)}$$
- Interpretation: Regula Falsi ersetzt die Funktion f im Bereich $[a, b]$ durch eine eine Gerade. Der berechnete Wert c ist deren Nullstelle.
- Trotz dieser Verbesserung konvergiert sie letzlich nicht wesentlich schneller als Intervallhalbierung.
- Moderne Versionen der Regula Falsi (Illinois-,Pegasus- und Anderson/Björk-Verfahren) konvergieren deutlich schneller (höhere Konvergenzordnung – siehe später).

Regula falsi (algorithmische Beschreibung)

Angabe und Ergebnis

Eine Funktion f, zwei Werte a und b mit $f(a) \cdot f(b) < 0$ und eine Genauigkeitsschranke $\epsilon > 0$. Ist $f(x)$ im Intervall $a \leq x \leq b$ stetig, dann findet dieser Algorithmus die Näherung c an eine Nullstelle c_0 von f mit Genauigkeit $|c - c_0| < \epsilon$

Algorithmus:

Wiederhole
  setze $c \leftarrow a - f(a)\frac{a-b}{f(a)-f(b)}$
  falls $f(b) \cdot f(c) < 0$
    setze $a \leftarrow b$
  sonst
    (Originalversion) nix
    (Illinois-Variante) reduziere $f(a)$ auf $\frac{1}{2}f(a)$
  setze $b \leftarrow c$
bis $|b - a| < \epsilon$ oder $f(c) = 0$

Regula falsi (algorithmische Beschreibung)

Angabe und Ergebnis

Eine Funktion f, zwei Werte a und b mit $f(a) \cdot f(b) < 0$ und eine Genauigkeitsschranke $\epsilon > 0$. Ist $f(x)$ im Intervall $a \leq x \leq b$ stetig, dann findet dieser Algorithmus die Näherung c an eine Nullstelle c_0 von f mit Genauigkeit $|c - c_0| < \epsilon$

Algorithmus:

Wiederhole
  setze $c \leftarrow a - f(a)\frac{a-b}{f(a)-f(b)}$
  falls $f(b) \cdot f(c) < 0$
    setze $a \leftarrow b$
  sonst
    (Originalversion) nix
    (Illinois-Variante) reduziere $f(a)$ auf $\frac{1}{2}f(a)$
  setze $b \leftarrow c$
bis $|b - a| < \epsilon$ oder $f(c) = 0$

Sekantenmethode

Rechnet wie Regula falsi mit linearer Interpolation, verzichtet aber auf den Einschluss der Nullstelle

Gegeben

eine Funktion $f(x)$ und zwei Startwerte $x^{(0)}$ und $x^{(1)}$.

Ergebnis

falls konvergent, eine Nullstelle von f.

Iterationsvorschrift

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - f(x^{(k)}) \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})} \qquad \text{für } k = 1, 2, 3 \ldots$$

Meist schneller als Intervallhalbierung, dafür keine Konvergenz-Garantie!

Newton-Verfahren

(manche sagen auch Newton-Raphson-Verfahren dazu)

Gegeben

eine differenzierbare Funktion $f(x)$ und ein Startwert $x^{(0)}$.

Ergebnis

falls konvergent, eine Nullstelle von f.

Iterationsvorschrift

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \qquad \text{für } k = 0, 1, 2 \dots$$

Isaac Newton schreibt seine Methode 1669 nieder, allerdings in ganz anderer Formulierung – nur für Polynome und ohne Differentialrechnung. Joseph Raphson veröffentlicht 1690 eine vereinfachte Darstellung. Erst 1740 beschreibt Thomas Simpson das allgemeine iterative Verfahren, so wie wir es kennen.

Newton-Verfahren

(manche sagen auch Newton-Raphson-Verfahren dazu)

Gegeben

eine differenzierbare Funktion $f(x)$ und ein Startwert $x^{(0)}$.

Ergebnis

falls konvergent, eine Nullstelle von f.

Iterationsvorschrift

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \qquad \text{für } k = 0, 1, 2 \ldots$$

Isaac Newton schreibt seine Methode 1669 nieder, allerdings in ganz anderer Formulierung – nur für Polynome und ohne Differentialrechnung. Joseph Raphson veröffentlicht 1690 eine vereinfachte Darstellung. Erst 1740 beschreibt Thomas Simpson das allgemeine iterative Verfahren, so wie wir es kennen.

Fixpunkt-Iteration

Das Grundprinzip vieler iterativer Verfahren

Gegeben

eine stetige Funktion $\mathbf{\Phi}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und ein Startwert $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Ergebnis

Falls konvergent, liefert die Fixpunkt-Iteration einen Fixpunkt $\mathbf{x}^\star$ von $\mathbf{\Phi}$.

Iterationsvorschrift

für $k = 0, 1, 2 \ldots$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}^{(k)})$$

Viele numerische Verfahren lassen sich als Fixpunkt-Iterationen formulieren. Die Theorie der Fixpunkt-Iteration ist daher von grundlegender Bedeutung.

Schreibweise für vektorwertige Funktionen

Vektoren und vektorwertige Funktionen fett gedruckt – abber in dieser Einheit bleiben wir eh noch bei skalaren Funktionen...

Reellwertige Funktionen, Skalare: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$
Vektorwertige Funktionen, Vektoren: $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$

Komponenten eines Vektors $\in \mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{oder } \mathbf{x}^T = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$$

Normalerweise ist mit $\mathbf{x}$ ein Spalten-, mit $\mathbf{x}^T$ ein Zeilenvektor gemeint.

Iterationsindizes sind (um sie von Vektorkomponenten zu unterscheiden) in der Regel hochgestellt, in Klammern: $\mathbf{x}^{(k)}, k = 0, 1, 2 \ldots$

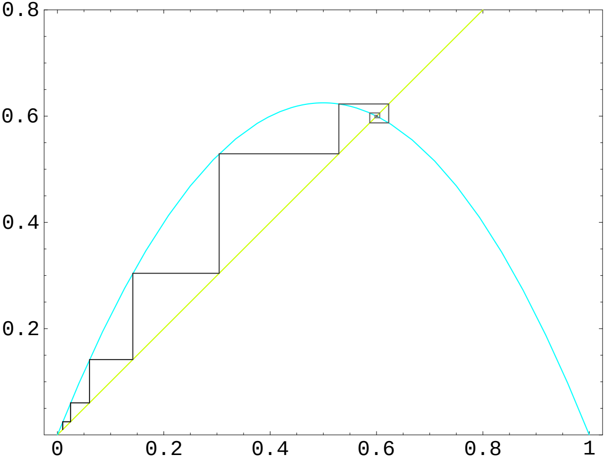
Fixpunkt-Iteration, graphisch interpretiert

waagrecht zur Mediane, senkrecht zur Funktion

Fixpunkt-Iteration

$$x = ax(1-x)$$

graphisch veranschaulicht für $a = 5/2$
Startwert $x = 1/100$



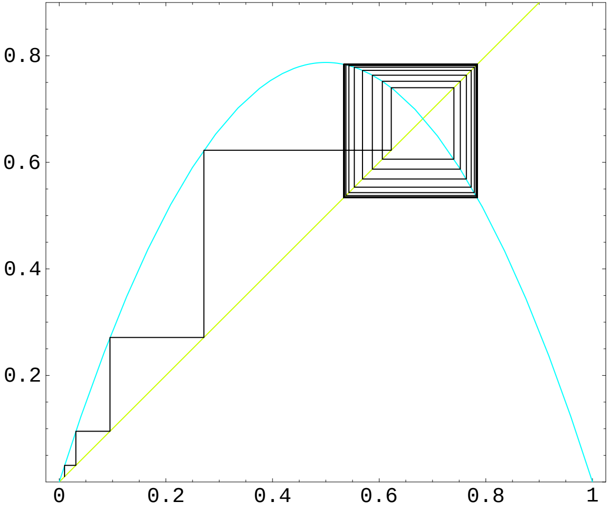
Fixpunkt-Iteration

$$x = ax(1 - x)$$

für $a = 3{,}15$
Startwert
$x = 1/100$

konvergiert zu
Zyklus
mit Periode 2

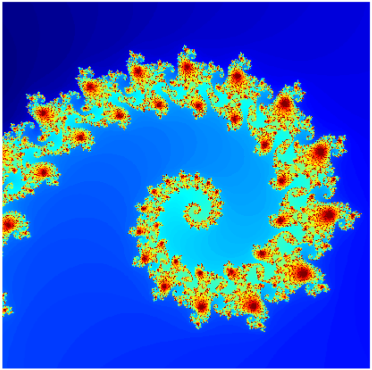
weitere Beispiele:
Logo des Lehrstuhls



Angewandte Mathematik

Ergebnisse von Fixpunkt-Iterationen in $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$

Mandelbrot-Menge und Barnsleys Farn, dazu gibt MATLAB-Skripts



Ein Beispiel $x - \epsilon \sin x = m$

Die Kepler-Gleichung setzt verschiedene Parameter einer elliptischen Umlaufbahn in Beziehung

Angenommen, $\epsilon \ll 1$ und $m \geq 0$ sind gegeben; x ist gesucht.
Formulieren Sie selber Lösungswege

- graphische Darstellung: wo liegen überhaupt Lösungen?
- Durch Fixpunkt-Iteration
- Als Nullstellen-Aufgabe (hier lassen sich das Newtonsche Verfahren oder die Sekanten-Methode gut anwenden)

Fixpunkt-Verfahren für Kepler-Gleichung

findet Fixpunkt von $\phi(x) = m + \epsilon \sin x$

Konkret für $m = 2, \epsilon = 0{,}1$ und Startwert $x^{(0)} = 0$ ergibt sich

neue Näherung	$x^{(1)} = \phi(x^{(0)}) =$	2,00000 00000 00000 00000
und weiter...	$x^{(2)} = \phi(x^{(1)}) =$	2,09092 97426 82568 16954
	$x^{(3)} = \phi(x^{(2)}) =$	2,08677 52880 24968 62712
	$x^{(4)} = \phi(x^{(3)}) =$	2,08698 10132 82436 76955
	$x^{(5)} = \phi(x^{(4)}) =$	2,08697 08612 33421 23181
	$x^{(6)} = \phi(x^{(5)}) =$	2,08697 13622 99081 87912
	$x^{(7)} = \phi(x^{(6)}) =$	2,08697 13375 68639 67423

Die Anzahl richtiger Stelle nimmt konstant zu (hier $\approx$ 1–2 pro Iteration)

Fixpunkt-Verfahren für Kepler-Gleichung

findet Fixpunkt von $\phi(x) = m + \epsilon \sin x$

Konkret für $m = 2, \epsilon = 0{,}1$ und Startwert $x^{(0)} = 0$ ergibt sich

neue Näherung	$x^{(1)} = \phi(x^{(0)}) =$	2,00000 00000 00000 00000
und weiter...	$x^{(2)} = \phi(x^{(1)}) =$	2,09092 97426 82568 16954
	$x^{(3)} = \phi(x^{(2)}) =$	2,08677 52880 24968 62712
	$x^{(4)} = \phi(x^{(3)}) =$	2,08698 10132 82436 76955
	$x^{(5)} = \phi(x^{(4)}) =$	2,08697 08612 33421 23181
	$x^{(6)} = \phi(x^{(5)}) =$	2,08697 13622 99081 87912
	$x^{(7)} = \phi(x^{(6)}) =$	2,08697 13375 68639 67423

Die Anzahl richtiger Stelle nimmt konstant zu (hier $\approx$ 1–2 pro Iteration)

Newton-Verfahren für Kepler-Gleichung

findet Nullstelle von $f(x) = x - \epsilon \sin x - m$

$$f(x) = x - \epsilon \sin x - m \qquad \text{Funktion}$$

$$f'(x) = 1 - \epsilon \cos x \qquad \text{Ableitung}$$

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{x^{(n)} - \epsilon \sin x^{(n)} - m}{1 - \epsilon \cos x^{(n)}} \qquad \text{Iterationsvorschrift}$$

Konkret für $m = 2, \epsilon = 0{,}1$ und Startwert $x^{(0)} = 0$ ergibt sich

$$f(x^{(0)}) = -2 \qquad f'(x^{(0)}) = 0{,}9$$

neue Näherung $x^{(1)} = 2{,}22222\,22222\,22222\,22222$

und weiter... $x^{(2)} = 2{,}08767\,96060\,17866\,31513$

$x^{(3)} = 2{,}08697\,13595\,13269\,54514$

$x^{(4)} = 2{,}08697\,13387\,31818\,75247$

$x^{(5)} = 2{,}08697\,13387\,31818\,73458$

Die Anzahl richtiger Stellen nimmt immer rascher zu

Newton-Verfahren für Kepler-Gleichung

findet Nullstelle von $f(x) = x - \epsilon \sin x - m$

$$f(x) = x - \epsilon \sin x - m \qquad \text{Funktion}$$

$$f'(x) = 1 - \epsilon \cos x \qquad \text{Ableitung}$$

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{x^{(n)} - \epsilon \sin x^{(n)} - m}{1 - \epsilon \cos x^{(n)}} \qquad \text{Iterationsvorschrift}$$

Konkret für $m = 2, \epsilon = 0{,}1$ und Startwert $x^{(0)} = 0$ ergibt sich

$$f(x^{(0)}) = -2 \qquad f'(x^{(0)}) = 0{,}9$$

neue Näherung $x^{(1)} = 2{,}22222\,22222\,22222\,22222$

und weiter... $x^{(2)} = 2{,}08767\,96060\,17866\,31513$

$x^{(3)} = 2{,}08697\,13595\,13269\,54514$

$x^{(4)} = 2{,}08697\,13387\,31818\,75247$

$x^{(5)} = 2{,}08697\,13387\,31818\,73458$

Die Anzahl richtiger Stellen nimmt immer rascher zu

Newton-Verfahren für Kepler-Gleichung

findet Nullstelle von $f(x) = x - \epsilon \sin x - m$

$$f(x) = x - \epsilon \sin x - m \qquad \text{Funktion}$$

$$f'(x) = 1 - \epsilon \cos x \qquad \text{Ableitung}$$

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{x^{(n)} - \epsilon \sin x^{(n)} - m}{1 - \epsilon \cos x^{(n)}} \qquad \text{Iterationsvorschrift}$$

Konkret für $m = 2, \epsilon = 0{,}1$ und Startwert $x^{(0)} = 0$ ergibt sich

$$f(x^{(0)}) = -2 \qquad f'(x^{(0)}) = 0{,}9$$

neue Näherung $x^{(1)} = 2{,}22222\,22222\,22222\,22222$

und weiter...

$$x^{(2)} = 2{,}08767\,96060\,17866\,31513$$
$$x^{(3)} = 2{,}08697\,13595\,13269\,54514$$
$$x^{(4)} = 2{,}08697\,13387\,31818\,75247$$
$$x^{(5)} = 2{,}08697\,13387\,31818\,73458$$

Die Anzahl richtiger Stellen nimmt immer rascher zu

Newton-Verfahren für Kepler-Gleichung

findet Nullstelle von $f(x) = x - \epsilon \sin x - m$

$f(x) = x - \epsilon \sin x - m$	Funktion
$f'(x) = 1 - \epsilon \cos x$	Ableitung
$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \dfrac{x^{(n)} - \epsilon \sin x^{(n)} - m}{1 - \epsilon \cos x^{(n)}}$	Iterationsvorschrift

Konkret für $m = 2, \epsilon = 0{,}1$ und Startwert $x^{(0)} = 0$ ergibt sich

$$f(x^{(0)}) = -2 \qquad f'(x^{(0)}) = 0{,}9$$

neue Näherung $\quad x^{(1)} = 2{,}22222\,22222\,22222\,22222$

und weiter...

$$x^{(2)} = 2{,}08767\,96060\,17866\,31513$$
$$x^{(3)} = 2{,}08697\,13595\,13269\,54514$$
$$x^{(4)} = 2{,}08697\,13387\,31818\,75247$$
$$x^{(5)} = 2{,}08697\,13387\,31818\,73458$$

Die Anzahl richtiger Stellen nimmt immer rascher zu

Newton-Verfahren für Kepler-Gleichung

findet Nullstelle von $f(x) = x - \epsilon \sin x - m$

$f(x) = x - \epsilon \sin x - m$	Funktion
$f'(x) = 1 - \epsilon \cos x$	Ableitung
$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \dfrac{x^{(n)} - \epsilon \sin x^{(n)} - m}{1 - \epsilon \cos x^{(n)}}$	Iterationsvorschrift

Konkret für $m = 2, \epsilon = 0{,}1$ und Startwert $x^{(0)} = 0$ ergibt sich

$$f(x^{(0)}) = -2 \qquad f'(x^{(0)}) = 0{,}9$$

neue Näherung $\quad x^{(1)} = 2{,}22222\,22222\,22222\,22222$

und weiter...

$$\begin{aligned}
x^{(2)} &= 2{,}08767\,96060\,17866\,31513\\
x^{(3)} &= 2{,}08697\,13595\,13269\,54514\\
x^{(4)} &= 2{,}08697\,13387\,31818\,75247\\
x^{(5)} &= 2{,}08697\,13387\,31818\,73458
\end{aligned}$$

Die Anzahl richtiger Stellen nimmt immer rascher zu

Newton-Verfahren in Fixpunkt-Form

Auch das Newton-Verfahren ist ein Fixpunkt-Verfahren!

Fixpunkt-Gleichung

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Bitte verwechseln Sie nicht

Das Newton-Verfahren sucht eine Nullstelle einer Funktion f.
Das Newton-Verfahren wendet Fixpunkt-Iteration auf die Funktion ϕ an.

$$\phi(x) = x - f(x)/f'(x)$$

Sekantenmethode für Kepler-Gleichung

berechnet aus zwei alten Werten den nächsten

Wähle Startwerte $x^{(0)} = 0; \quad x^{(1)} = 2$

Nächster Wert $x^{(2)} = x^{(1)} - f(x^{(1)}) \dfrac{x^{(1)} - x^{(0)}}{f(x^{(1)}) - f(x^{(0)})}$

neue Näherung	$x^{(2)} = 2{,}09526\,07609\,21748\,27768$
und weiter...	$x^{(3)} = 2{,}08694\,09346\,18957\,85429$
	$x^{(4)} = 2{,}08697\,13283\,07441\,26503$
	$x^{(5)} = 2{,}08697\,13387\,31831\,86894$
	$x^{(6)} = 2{,}08697\,13387\,31818\,73458$

Die Anzahl richtiger Stellen nimmt auch hier rasch zu

Sekantenmethode für Kepler-Gleichung

berechnet aus zwei alten Werten den nächsten

Wähle Startwerte $x^{(0)} = 0; \quad x^{(1)} = 2$

Nächster Wert $x^{(2)} = x^{(1)} - f(x^{(1)}) \dfrac{x^{(1)} - x^{(0)}}{f(x^{(1)}) - f(x^{(0)})}$

neue Näherung	$x^{(2)} = 2{,}09526\,07609\,21748\,27768$
und weiter...	$x^{(3)} = 2{,}08694\,09346\,18957\,85429$
	$x^{(4)} = 2{,}08697\,13283\,07441\,26503$
	$x^{(5)} = 2{,}08697\,13387\,31831\,86894$
	$x^{(6)} = 2{,}08697\,13387\,31818\,73458$

Die Anzahl richtiger Stellen nimmt auch hier rasch zu

Sekantenmethode für Kepler-Gleichung

berechnet aus zwei alten Werten den nächsten

Wähle Startwerte $x^{(0)} = 0; \quad x^{(1)} = 2$

Nächster Wert $x^{(2)} = x^{(1)} - f(x^{(1)}) \dfrac{x^{(1)} - x^{(0)}}{f(x^{(1)}) - f(x^{(0)})}$

neue Näherung	$x^{(2)} = 2{,}09526\,07609\,21748\,27768$
und weiter...	$x^{(3)} = 2{,}08694\,09346\,18957\,85429$
	$x^{(4)} = 2{,}08697\,13283\,07441\,26503$
	$x^{(5)} = 2{,}08697\,13387\,31831\,86894$
	$x^{(6)} = 2{,}08697\,13387\,31818\,73458$

Die Anzahl richtiger Stellen nimmt auch hier rasch zu

Sekantenmethode für Kepler-Gleichung

berechnet aus zwei alten Werten den nächsten

Wähle Startwerte $x^{(0)} = 0; \quad x^{(1)} = 2$

Nächster Wert $x^{(2)} = x^{(1)} - f(x^{(1)}) \dfrac{x^{(1)} - x^{(0)}}{f(x^{(1)}) - f(x^{(0)})}$

neue Näherung $\quad x^{(2)} = 2{,}09526\,07609\,21748\,27768$

und weiter... $\quad x^{(3)} = 2{,}08694\,09346\,18957\,85429$

$x^{(4)} = 2{,}08697\,13283\,07441\,26503$

$x^{(5)} = 2{,}08697\,13387\,31831\,86894$

$x^{(6)} = 2{,}08697\,13387\,31818\,73458$

Die Anzahl richtiger Stellen nimmt auch hier rasch zu

Sekantenmethode für Kepler-Gleichung

berechnet aus zwei alten Werten den nächsten

Wähle Startwerte $x^{(0)} = 0; \quad x^{(1)} = 2$

Nächster Wert $x^{(2)} = x^{(1)} - f(x^{(1)}) \dfrac{x^{(1)} - x^{(0)}}{f(x^{(1)}) - f(x^{(0)})}$

neue Näherung $x^{(2)} = 2{,}09526\,07609\,21748\,27768$

und weiter...
$x^{(3)} = 2{,}08694\,09346\,18957\,85429$
$x^{(4)} = 2{,}08697\,13283\,07441\,26503$
$x^{(5)} = 2{,}08697\,13387\,31831\,86894$
$x^{(6)} = 2{,}08697\,13387\,31818\,73458$

Die Anzahl richtiger Stellen nimmt auch hier rasch zu

Sekantenmethode

Sekantenmethode ist zweidimensionale Fixpunkt-Iteration

Die Sekantenmethode berechnet aus zwei Näherungen $x^{(0)}, x^{(1)}$ eine verbesserte Näherung, rechnet dann mit zwei neuen Näherungen weiter. Fasse die beiden Näherungen als Komponenten eines Vektors auf. Die Schreibweise

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 - f(x_2)\frac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)} \end{bmatrix}$$

formuliert die Sekantenmethode als zweidimensionale Fixpunkt-Iteration

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}^{(k)}) \quad \text{für } k = 0, 1, 2 \ldots$$

Reihenentwicklung

Nur damit Sie sehen: nicht alle Näherungsverfahren sind vom Typ der Fixpunkt-Iteration

- Reihenentwicklungen sind ein anderer Typ von Näherungsverfahren (die wir hier nicht weiter behandeln).
- Für die Kepler-Gleichung gilt (unter Vernachlässigung vierter und höherer Potenzen von ϵ):

$$x = m + \left(\epsilon - \frac{\epsilon^3}{8}\right) \sin(m) + \frac{\epsilon^2}{2} \sin(2m) + \frac{3\epsilon^3}{8} \sin(3m) + \dots$$

- Je kleiner ϵ, desto genauer. Für zu große ϵ unbrauchbar.

Gliederung 1. Vorlesung

Verfahren in der Übersicht

Vorteile, Nachteile

- Intervallhalbierung, Regula Falsi: Funktionieren garantiert bei stetigen Funktionen wenn Anfangsintervall Nullstelle einschließt. Langsame Konvergenz (es gibt deutlich schnellere Varianten).
- Sekantenmethode Schnellere Konvergenz als bei den beiden obigen Verfahren, wenn Funktion „gutartig“ (glatt) ist. Kann fehlschlagen.
- Newton-Raphson-Verfahren Noch schnellere Konvergenz bei glatten Funktionen. Braucht Ableitungen und gute Startwerte.
- Fixpunkt-Iteration Rasch und einfach, wenn komplizierte Terme in erster Näherung vernachlässigt werden können. Kein Kochrezept.

Rechenumgebungen wie MATLAB kombinieren trickreich mehrerere Verfahren.

Wiederholung, Fragenliste

Nichtlineare Gleichungen in einer Variablen

Was ist...

- eine lineare (nichtlineare, polynomiale, algebraische, transzendente) Gleichung?
- eine Nullstelle? ... mehrfache Nullstelle?
- ein Fixpunkt?

Wie geht...

- Intervallhalbierung?... Regula Falsi?
- Sekantenmethode?... Newton-Verfahren?

Theorie

- Wann, warum und wie schnell findet Intervallhalbierung garantiert eine Nullstelle?
- Iterationsvorschrift einer Fixpunkt-Iteration im $\mathbb{R}^n$

Wiederholung, Fragenliste

Nichtlineare Gleichungen in einer Variablen

Was ist. . .

- eine lineare (nichtlineare, polynomiale, algebraische, transzendente) Gleichung?
- eine Nullstelle? . . . mehrfache Nullstelle?
- ein Fixpunkt?

Wie geht. . .

- Intervallhalbierung?. . . Regula Falsi?
- Sekantenmethode?. . . Newton-Verfahren?

Theorie

- Wann, warum und wie schnell findet Intervallhalbierung garantiert eine Nullstelle?
- Iterationsvorschrift einer Fixpunkt-Iteration im $\mathbb{R}^n$

Wiederholung, Fragenliste

Nichtlineare Gleichungen in einer Variablen

Was ist...
- eine lineare (nichtlineare, polynomiale, algebraische, transzendente) Gleichung?
- eine Nullstelle? ... mehrfache Nullstelle?
- ein Fixpunkt?

Wie geht...
- Intervallhalbierung?... Regula Falsi?
- Sekantenmethode?... Newton-Verfahren?

Theorie
- Wann, warum und wie schnell findet Intervallhalbierung garantiert eine Nullstelle?
- Iterationsvorschrift einer Fixpunkt-Iteration im $\mathbb{R}^n$

Wiederholung, Fragenliste

Nichtlineare Gleichungen in einer Variablen

Was ist. . .

- eine lineare (nichtlineare, polynomiale, algebraische, transzendente) Gleichung?
- eine Nullstelle? . . . mehrfache Nullstelle?
- ein Fixpunkt?

Wie geht. . .

- Intervallhalbierung?. . . Regula Falsi?
- Sekantenmethode?. . . Newton-Verfahren?

Theorie

- Wann, warum und wie schnell findet Intervallhalbierung garantiert eine Nullstelle?
- Iterationsvorschrift einer Fixpunkt-Iteration im $\mathbb{R}^n$

Eine Prüfungsfrage

Gesucht ist die Lösung der Gleichung

$$x \ln x = 8 \ .$$

Ordnen Sie zu: Welche Iterationsvorschrift entspricht welchem Verfahren?

$\boxed{\text{A}}$ $\quad x^{(n+1)} = \dfrac{8}{\ln x^{(n)}}$ $\qquad$ $\square$ Newton-Verf.

$\boxed{\text{B}}$ $\quad x^{(n+1)} = x^{(n)} - \dfrac{x^{(n)} \ln x^{(n)} - 8}{1 + \ln x^{(n)}}$ $\qquad$ $\square$ Sekanten-Meth.

$\boxed{\text{C}}$ $\quad x^{(n+1)} = x^{(n)} - \dfrac{\left(x^{(n-1)} - x^{(n)}\right)\left(x^{(n)} \ln x^{(n)} - 8\right)}{x^{(n-1)} \ln x^{(n-1)} - x^{(n)} \ln x^{(n)}}$ $\qquad$ $\square$ Fixpunkt-It.

Noch eine Prüfungsfrage

Die Funktion

$$\phi(x) = \frac{1}{6}\left(-x^3 + 2x^2 + 7x - 2\right)$$

hat Fixpunkte für $x = -1,\ +1$ und $+2$; sie hat eine Nullstelle nahe bei $x = \frac{1}{4}$.

1. Führen Sie für die drei verschiedenen Startwerte $x^{(0)} = -1{,}1; \quad x^{(0)} = +1{,}1$ und $x^{(0)} = 2{,}1$ jeweils einige Schritte der Fixpunkt-Iteration aus. Beschreiben Sie das Verhalten der Iterationen.
2. Finden Sie einen Näherungswert (vier korrekte Nachkommastellen) für die *Nullstelle* von ϕ mit dem Newtonschen Verfahren (Startwert 0).
3. Angenommen, Sie wollen durch Intervallhalbierung eine Nullstelle von ϕ finden, mit Fehler $\epsilon < 10^{-3}$. Sie beginnen mit dem Intervall $[0, 1]$. Wie viele Schritte brauchen Sie? Erklären Sie, warum.