Fourierreihen

10. Vorlesung
170 021 Numerische Methoden I

Alexander Steinicke

Montanuniversität Leoben

11. Jänner 2024

Fourierreihen

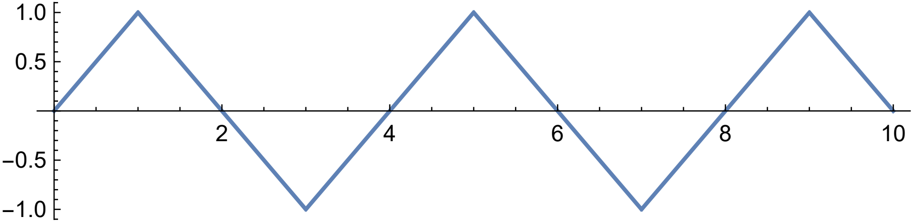
1. Fourierreihe
   - Motivation: Darstellung „beliebiger“ Funktionen
   - Fourierreihe (Sinus-Cosinus-Form)
   - Fourierreihe (komplexe Form)
   - Nette Beispiele

2. Fourierreihe, Basisfunktionen, FFT
   - Wichtige Eigenschaften: Orthogonalität, Norm
   - Basisvektoren, Basisfunktionen
   - Diskrete Fourierreihe, FFT
     - Basisvektoren
     - Frequenzanalyse

Gliederung 10. Vorlesung

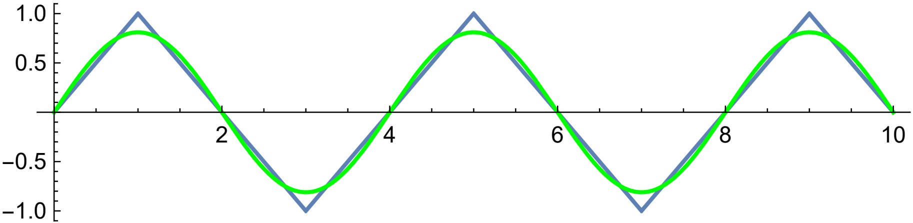
1. Fourierreihe
   - Motivation: Darstellung „beliebiger“ Funktionen
   - Fourierreihe (Sinus-Cosinus-Form)
   - Fourierreihe (komplexe Form)
   - Nette Beispiele
2. Fourierreihe, Basisfunktionen, FFT
   - Wichtige Eigenschaften: Orthogonalität, Norm
   - Basisvektoren, Basisfunktionen
   - Diskrete Fourierreihe, FFT

Lässt sich diese Dreiecks-Funktion durch Sinus- oder Cosinusfunktionen approximieren?



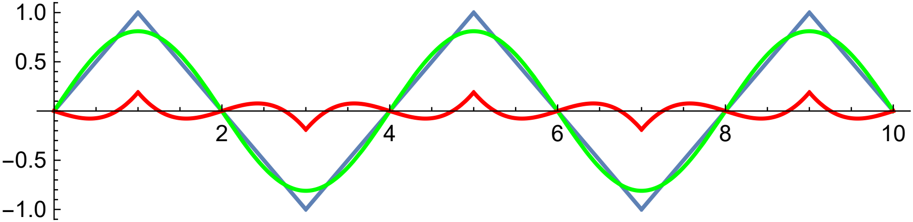
Eine Sinus-Funktion bietet sich an: $\sin(2\pi t/4)\ldots$

Lässt sich diese Dreiecks-Funktion durch Sinus- oder Cosinusfunktionen approximieren?

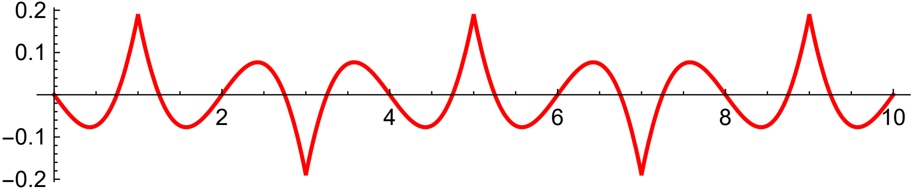


und $\frac{8}{\pi^2}\sin(2\pi t/4)$ passt gar nicht so schlecht, aber...

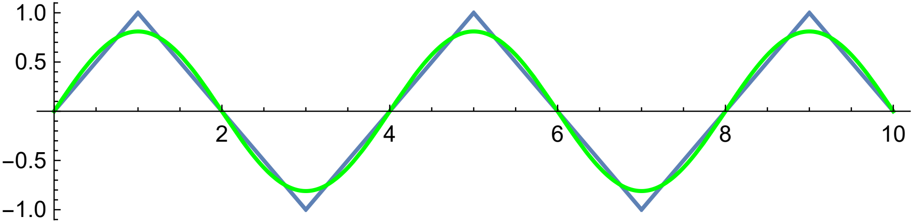
Lässt sich diese Dreiecks-Funktion durch Sinus- oder Cosinusfunktionen approximieren?



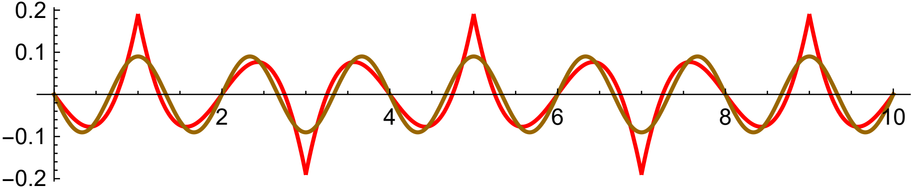
Das ist der Fehler



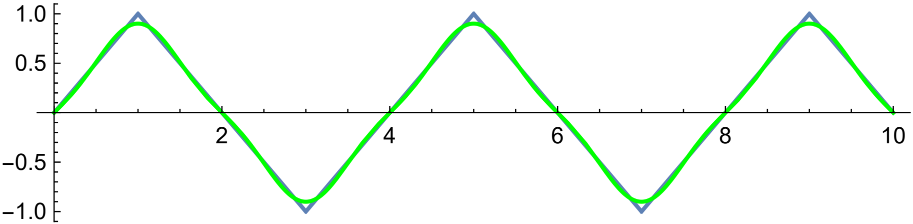
Lässt sich diese Dreiecks-Funktion durch Sinus- oder Cosinusfunktionen approximieren?



Das ist der Fehler–wir passen auch daran eine Sinus-Funktion an

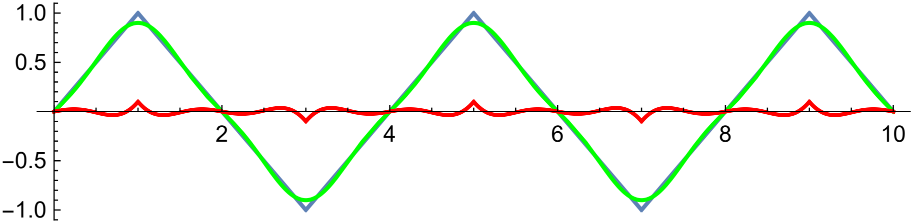


Lässt sich diese Dreiecks-Funktion durch Sinus- oder Cosinusfunktionen approximieren?

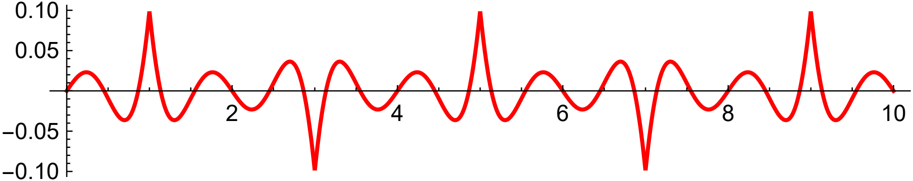


und $\frac{8}{\pi^2}\left[\sin(2\pi t/4) - \frac{1}{9}\sin(6\pi t/4)\right]$ passt schon besser, aber...

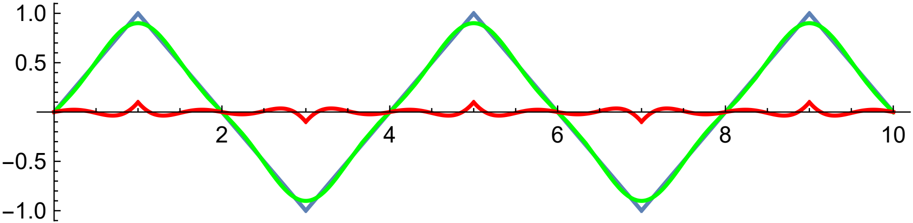
Lässt sich diese Dreiecks-Funktion durch Sinus- oder Cosinusfunktionen approximieren?



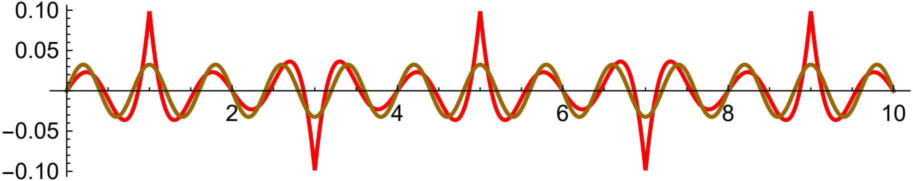
Das ist der Fehler



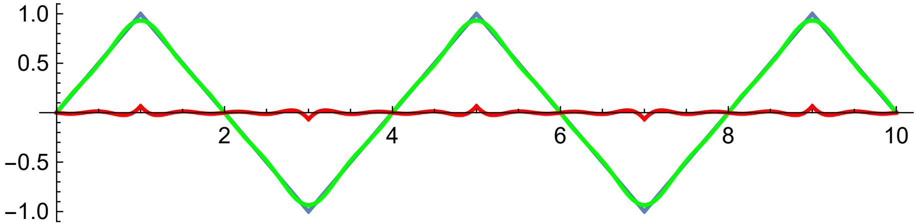
Lässt sich diese Dreiecks-Funktion durch Sinus- oder Cosinusfunktionen approximieren?



Das ist der Fehler–wir passen daran noch eine Sinus-Funktion an

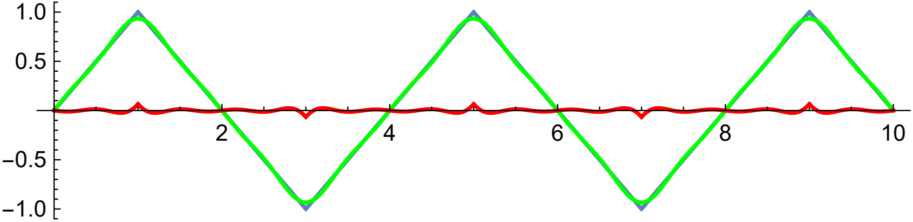


Lässt sich diese Dreiecks-Funktion durch Sinus- oder Cosinusfunktionen approximieren?

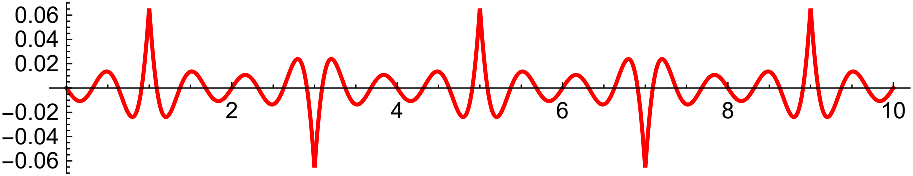


$\frac{8}{\pi^2}\left[\sin(2\pi t/4) - \frac{1}{9}\sin(6\pi t/4) + \frac{1}{25}\sin(10\pi t/4)\right]$ passt noch besser...

Lässt sich diese Dreiecks-Funktion durch Sinus- oder Cosinusfunktionen approximieren?



Das ist der Fehler

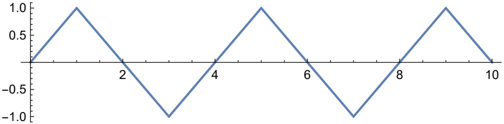


Fourierreihe

stellt eine Funktion als Summe von Sinus- und Cosinuswellen dar

Gegeben: eine periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, Periode T

Beispiel: Dreiecks-Signal



Gesucht:

die Koeffizienten $a_0, a_1, b_1, b_2, \ldots$ einer Darstellung

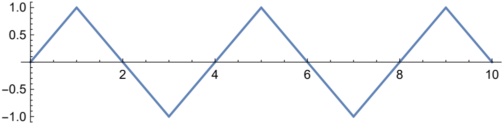
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) \right)$$

Fourierreihe

stellt eine Funktion als Summe von Sinus- und Cosinuswellen dar

Gegeben: eine periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, Periode T

Beispiel: Dreiecks-Signal



$$= \frac{8}{\pi^2}\left[\sin(2\pi t/4) - \dots - \frac{1}{9}\sin(6\pi t/4) + \dots + \frac{1}{25}\sin(10\pi t/4) \pm \dots\right]$$

Gesucht:

die Koeffizienten $a_0,\ a_1,\ b_1,\ b_2, \dots$ einer Darstellung

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)\right)$$

Fourierreihe

Gegeben: eine periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, Periode T

- Es reicht, f auf einem Intervall $[t_0, t_0 + T]$ (eine Periode lang) zu definieren.
- Die Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$ vereinfacht Formeln.

Darstellung von F als Summe von Sinus- und Cosinus-Termen

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

mit

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \qquad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$

Fourierreihe

Tipps zum Berechnen der Integrale

Auswerten von

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$

- $\frac{a_0}{2}$ ist der Mittelwert der Funktion.
- Integration erfolgt über eine volle Periode. Integrationsgrenzen lassen sich passend verschieben

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \int_0^T = \int_\tau^{\tau+T}$$

- Symmetrie ausnützen!
  Gerade Funktion $f(-x) = f(x)$: nur cos-Terme.
  Ungerade Funktion $f(-x) = -f(x)$: nur sin-Terme.

Fourierreihe: Komplexe Schreibweise

Alle Formeln werden einfacher!

Gegeben: eine periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, Periode T

Fourierreihenentwicklung von f

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(in\omega t)$$

mit

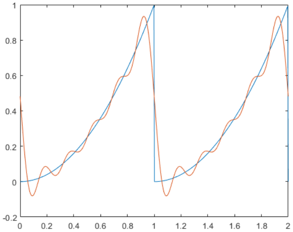
$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot \exp(-in\omega t)\,\mathrm{d}t$$

MATLAB-Skript zur komplexen Fourierreihe

Übungsaufgabe 87 fragt nach der Fourierreihe einer Sägezahn-artigen Funktion,

$$f(t) = t^2 \text{ für } 0 \leq t < 1,$$

periodisch fortgesetzt.
Siehe MATLAB-Skript `Aufg87komplex.m`.



Die Datei soll zeigen

- Cosinus- und Sinus-Koeffizienten entsprechen Real- und Imaginärteil der komplexen Koeffizienten.
- a_n teilt sich auf: $\operatorname{Re} c_{-n} = \quad \operatorname{Re} c_n = \frac{1}{2} a_n$ (gilt auch für $n = 0$)
- b_n teilt sich auf: $\operatorname{Im} c_{-n} = -\operatorname{Im} c_n = \frac{1}{2} b_n$
- Einheitliche Formeln für c_n, keine Fallunterscheidung, kein Sonderfall $n = 0$.

Beispiele zur Motivation

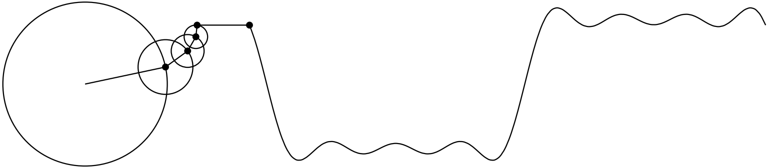
- Nettes Beispiel 1: Rechteckswelle-Zeigerdiagramm, animiert in Datei `Square-Wave.pdf`.
- Nettes Beispiel 2: Herr Fourier, von seiner Reihe gezeichnet.
- Nettes Beispiel 3: *The Eigenwalker*. Hier kommen nicht nur Fourierreihen zum Einsatz, sondern auch Singulärwertzerlegung wie in dem Beispiel zu den *eigenfaces* aus der 7. Vorlesung.

Nette Beispiele

Datei `Square-Wave.pdf` zeigt Überlagerung harmonischer Schwingungen in einem Zeigerdiagramm

Fourier Series of Square Wave

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{2 \nmid n}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

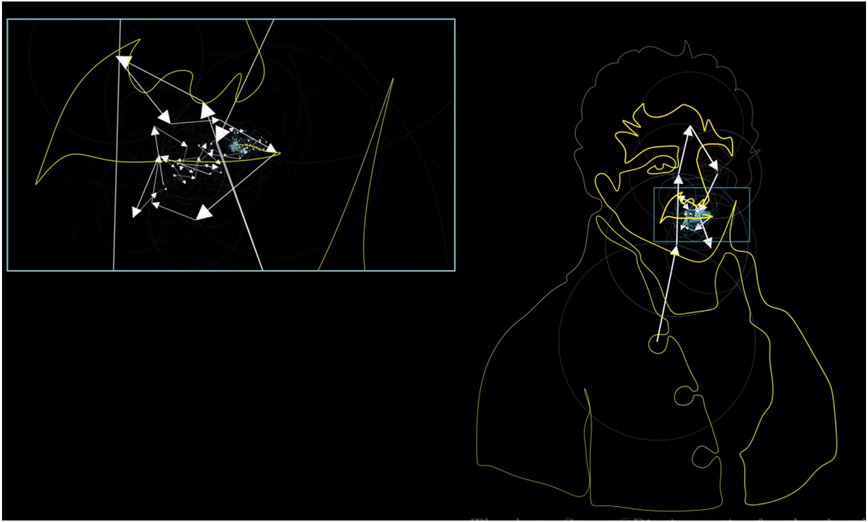


$(n = 1, 3, 5, 7)$ by Seungwon Park, illustr. & computed with LaTeX.

Quelle: `https://gist.github.com/seungwonpark/b10d86dd27920bba4b33d41e81855c47`

Zeigerdiagramm genial weitergedacht

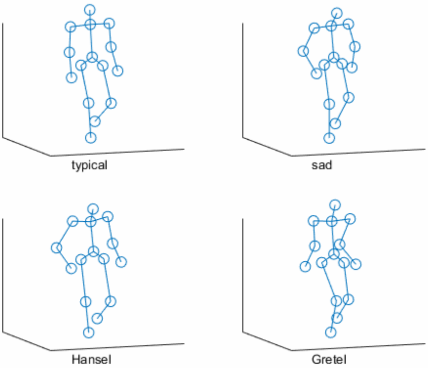
Grant Sanderson zeigt auf 3Blue1Brown eine fantastische Animation (zu Anfang des Videos und nochmal ab 22:00 min; dazwischen geht es um die Wärmeleitungsgleichung, das passt hier noch nicht zum Thema)



Quelle: `https://www.youtube.com/watch?v=r6sGWTCMz2k&feature=emb_rel_end`

Der *Eigenwalker* als Modell für den menschlichen Gang

Cleve Moler stellt in seinem Blog ein Biomechanik-Forschungsprojekt vor: Motion Capture erfasst den Bewegungsablauf gehender Versuchspersonen. Fourier-Analyse und Singulärwertzerlegung erzeugen ein Modell.



Quelle: `https://blogs.mathworks.com/cleve/2016/04/11/the-eigenwalker-model-of-the-human-gait/`

Der *Eigenwalker* als Modell für den menschlichen Gang

Die Gehbewegung ist periodisch, Fourierreihen mit fünf Termen beschreiben die Positionen von 15 Referenzpunkten im Raum. Pro Referenzpunkt und Koordinate also:

$$p(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t$$

Insgesamt $5 \times 15 \times 3$ Koeffizienten pro Bewegungsmodell.
Nikolaus Troje an der Ruhr-Universität in Bochum bestimmte für einige Dutzend Versuchspersonen (deutsche Studierende) deren Koeffizienten. Aus diesem großen Datensatz mittelte er mit Principal Component Analysis (=Singulärwertzerlegung) einen Satz von Fourier-Koeffizienten heraus. Er definiert den *eigenwalker*, den typischen deutschen Jungakademiker-Gang.

In MATLAB lässt sich eine App herunterladen, die den Eigenwalker in Bewegung zeigt. Auch an den Fourierkoeffizienten lässt sich herumspielen.

Gliederung 10. Vorlesung

Fourierreihe stellt Funktionen durch Basisfunktionen dar

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(in\omega t)$$

f ist Linearkombination von Basisfunktionen $\exp(in\omega t)$

Vergleiche mit Potenzreihe, da agieren $1, x, x^2 \ldots$ als Basis.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

- In Fourierreihen übernehmen Sinus-, Cosinus- oder Exponentialfunktionen die Rolle der Basisfunktionen.
- So wie Vektoren haben auch (Basis-) Funktionen eine Norm und können zueinander orthogonal sein.
- Welche Klassen von Funktionen sich durch welche Basis darstellen lassen, ist mathematisch nicht trivial.

Inneres Produkt und 2-Norm einer periodischen Funktion

verallgemeinert Skalarprodukt und 2-Norm eines Vektors

Für Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \|\mathbf{x}\|_2 \qquad \text{Euklidische Länge, 2-Norm}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \qquad \text{skalares (oder inneres) Produkt}$$

Verallgemeinerung für periodische Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\sqrt{\int_0^T f(t)^2 \, dt} = \|f\|_2 \qquad \text{2-Norm}$$

$$\int_0^T f(t) g(t) \, dt \qquad \text{inneres Produkt}$$

Wiederholung: Inneres Produkt

Hier erst mal die Definition im reellen Fall

Ein inneres Produkt ist eine Rechenmaschine. . .

. . . die aus zwei Eingabe-Objekten („Vektoren“) $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ einen skalaren Output-Wert $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \in \mathbb{R}$ erzeugt und dabei folgende Regeln beachtet.

Für alle Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ und Skalare α, β gilt:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} \qquad \text{Symmetrie}$$

$$(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}) \qquad \text{Linearität}$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} > 0 \ \forall \mathbf{x} \neq 0 \qquad \text{positive Definitheit}$$

Übliche Schreibweisen: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, bei Spaltenvektoren auch $\mathbf{x}^T\mathbf{y}$, allgemein $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$

Leicht nachzurechnen: Die Definition $\langle f, g \rangle = \int_0^T f(t)g(t)\,dt$ erfüllt alle Eigenschaften eines inneren Produkts.

Wiederholung: Norm

Siehe 2. Vorlesung; dort Vektor- und Matrixnormen

Eine Norm ist eine Rechenmaschine…

…die einem Eingabe-Objekt („Vektor“) f eine nichtnegative reelle Zahl $\|f\|$ zuordnet und dabei folgende Regeln beachtet.

Für alle Vektoren f, g und Skalare α gilt:

$\|f\| = 0 \;\Rightarrow\; f = 0$	Nur der Nullvektor hat Norm 0
$\|\alpha f\| = \vert\alpha\vert \|f\|$	Skalar lässt sich herausheben
$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$	Dreiecksungleichung

Ein inneres Produkt erzeugt automatisch eine Norm

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, g\rangle}$$

Quadratintegrable Funktionen bilden einen Vektorraum

Funktionen lassen sich addieren und mit Skalaren multiplizieren. In diesem Sinn verhalten sie sich genauso wie gewöhnliche Vektoren des $\mathbb{R}^n$. Sofern die entsprechenden Integrale existieren, lassen sich auch Norm und inneres Produkt definieren.

Alles, was sich wie ein Vektor verhält, ist ein „Vektor“

weniger plakativ: ... lässt sich als Vektor in einem abstrakteren Sinn auffassen.
Begriffe wie „Größe“, „Abstand“, „Konvergenz“, „Orthogonalität“, „Komponente entlang einer Richtung“, ... lassen sich sinnvoll übertragen.

Der Vektorraum der quadratintegrablen Funktionen – der natürliche Lebensraum von Fourierreihen – wird als L^2 bezeichnet.

Normierung und Orthogonalität der Basisfunktionen

Wichtige Eigenschaften- daraus folgen die Formeln der Fourierkoeffizienten!

Für $m, n \in \mathbb{Z}$ und $\omega = 2\pi/T$ gilt

- Normierung

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin^2(n\omega t)\, dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2(n\omega t)\, dt = \frac{T}{2} \quad \forall n \neq 0$$

- Orthogonalität

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(m\omega t) \sin(n\omega t)\, \mathrm{d}t = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(m\omega t) \cos(n\omega t)\, \mathrm{d}t = 0 \quad \forall m \neq n$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(m\omega t) \cos(n\omega t)\, \mathrm{d}t = 0 \quad \forall m, n$$

Orthonormalität der Basisfunktionen

Für komplexe Exponentialfunktionen viel einheitlicher

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \exp(im\omega t)\exp(-in\omega t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & \forall m = n \\ 0 & \forall m \neq n \end{cases}$$

Beachte! Für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ oder komplexwertige $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist das innere Produkt so definiert:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i \qquad \langle f, g \rangle = \int_0^T f(t)\bar{g}(t)\,dt$$

Orthonormalität der Basisfunktionen

Für komplexe Exponentialfunktionen viel einheitlicher

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \exp(im\omega t)\exp(-in\omega t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & \forall m = n \\ 0 & \forall m \neq n \end{cases}$$

Beachte! Für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ oder komplexwertige $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist das innere Produkt so definiert:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i \qquad \langle f, g \rangle = \int_0^T f(t)\bar{g}(t)\, dt$$

Die Fourier-Koeffizienten und die 2-Norm

Eine Art Pythagoräischer Lehsatz für Funktionen

Für Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \|\mathbf{x}\|_2$ Euklidische Länge, 2-Norm

Verallgemeinerung für periodische Funktionen

$$\sqrt{\int_0^T f(t)^2\, dt} = \|f\|_2 \quad \text{2-Norm}$$

Es gilt: 2-Norm des Koeffizientenvektors ist 2-Norm der Funktion.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{T}\|f\|_2^2$$

(Sinus-Cosinus-Form braucht Skalierungsfaktor, und a_0 tanzt wieder aus der Reihe)

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 = \frac{2}{T}\|f\|_2^2$$

Die Fourier-Koeffizienten und die 2-Norm

Eine Art Pythagoräischer Lehsatz für Funktionen

Für Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \|\mathbf{x}\|_2$ Euklidische Länge, 2-Norm

Verallgemeinerung für periodische Funktionen

$$\sqrt{\int_0^T f(t)^2\, dt} = \|f\|_2 \quad \text{2-Norm}$$

Es gilt: 2-Norm des Koeffizientenvektors ist 2-Norm der Funktion.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{T}\|f\|_2^2$$

(Sinus-Cosinus-Form braucht Skalierungsfaktor, und a_0 tanzt wieder aus der Reihe)

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 = \frac{2}{T}\|f\|_2^2$$

Zum Vergleich: Orthonormale Basisvektoren im $\mathbb{R}^3$

Im $\mathbb{R}^3$ lässt sich jeder Vektor als Linearkombination der Basisvektoren

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

darstellen. Es ist zum Beispiel

$$\begin{bmatrix}3\\2\\5\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Das funktioniert auch für drei beliebigen Basisvektoren, sofern sie linear unabhängig sind. Wenn die Basisvektoren erstens auf einander senkrecht stehen und zweitens jeweils die Länge eins haben, dann spricht man von einer *orthonormalen Basis*.

Ein anderes System von Basisvektoren

Andere Basisvektoren sind zum Beispiel

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bitte nachprüfen: Haben Länge 1, stehen aufeinander orthogonal.
In dieser Basis hat der Vektor $\mathbf{v}$ von vorhin die Darstellung

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \left(\frac{5}{\sqrt{2}} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wichtige Eigenschaft: Die Länge (Norm) $\|\mathbf{v}\|$ errechnet sich aus den Koeffizienten „mit der üblichen Formel". In unserem Beispiel ist

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{38} \qquad \text{in der Standard-Basis}$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\frac{5^2}{2} + \frac{1}{2} + 5^2} = \sqrt{38} \qquad \text{in der anderen Basis}$$

Ähnliche bei Fourierreihen: sie stellen Funktionen als Summe von Koeffizienten mal Basisfunktionen dar. Orthogonalität, Norm gelten verallgemeinert.

Diskrete Fourierreihe und FFT

Gegeben:

Statt einer Funktion $f(t)$ ein Vektor von diskreten Funktionswerten $f_j := f(t_j)$, $j = 0, \ldots, N-1$.

Statt: $$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-i\omega_k t}\, dt$$

Approximation des Integrals durch eine Summe:

$$c_k \approx \hat{f}(k) := \sum_{j=0}^{N-1} e^{-\frac{2i\pi}{N} jk} f_j, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Die FFT (Fast Fourier Transform) ist ein sehr effizienter Algorithmus zur Berechnung dieser Summen.

Diskrete Fourierreihe und FFT

Gegeben:

Statt einer Funktion $f(t)$ ein Vektor von diskreten Funktionswerten $f_j := f(t_j)$, $j = 0, \ldots, N-1$.

$$\text{Statt:} \qquad c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-i\omega_k t}\, dt$$

Approximation des Integrals durch eine Summe:

$$c_k \approx \hat{f}(k) := \sum_{j=0}^{N-1} e^{-\frac{2i\pi}{N} jk} f_j, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Die FFT (Fast Fourier Transform) ist ein sehr effizienter Algorithmus zur Berechnung dieser Summen.

Diskrete Fourierreihe und FFT

Gegeben:

Statt einer Funktion $f(t)$ ein Vektor von diskreten Funktionswerten $f_j := f(t_j)$, $j = 0, \ldots, N-1$.

$$\text{Statt:} \qquad c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-i\omega_k t}\, dt$$

Approximation des Integrals durch eine Summe:

$$c_k \approx \hat{f}(k) := \sum_{j=0}^{N-1} e^{-\frac{2i\pi}{N} jk} f_j, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Die FFT (Fast Fourier Transform) ist ein sehr effizienter Algorithmus zur Berechnung dieser Summen.

Die diskrete Fourierreihe

stellt den Datenvektor als Linearkombination spezieller Basisvektoren dar

Eigenschaften: Die Vektoren

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ e^{\frac{2\pi i}{N}} \\ e^{\frac{2\pi i}{N}2} \\ e^{\frac{2\pi i}{N}3} \\ \dots \\ e^{\frac{2\pi i}{N}(N-3)} \\ e^{\frac{2\pi i}{N}(N-2)} \\ e^{\frac{2\pi i}{N}(N-1)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ e^{\frac{2\pi i}{N}2} \\ e^{\frac{2\pi i}{N}4} \\ e^{\frac{2\pi i}{N}6} \\ \dots \\ e^{\frac{2\pi i}{N}2(N-3)} \\ e^{\frac{2\pi i}{2}(N-2)} \\ e^{\frac{2\pi i}{2}(N-1)} \end{bmatrix}, \quad \dots, \begin{bmatrix} 1 \\ e^{\frac{2\pi i}{N}(N-1)} \\ e^{\frac{2\pi i}{N}2(N-1)} \\ e^{\frac{2\pi i}{N}3(N-1)} \\ \dots \\ e^{\frac{2\pi i}{N}(N-1)(N-3)} \\ e^{\frac{2\pi i}{N}(N-1)(N-2)} \\ e^{\frac{2\pi i}{N}(N-1)(N-1)} \end{bmatrix},$$

sind orthogonal im $\mathbb{C}^N$.

Wenn Sie Real- oder Imaginärteil so eines Vektors als Plot darstellen:
Jeder Plot sieht wie eine Sinus- oder Cosinus-Schwingung aus.

Die diskrete Fourierreihe

stellt den Datenvektor als Linearkombination spezieller Basisvektoren dar

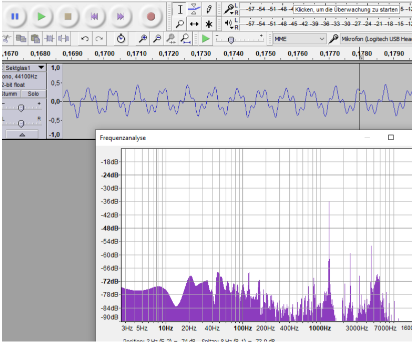
Eigenschaften: Die Vektoren

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ e^{\frac{2\pi i}{N}} \\ e^{\frac{2\pi i}{N}2} \\ e^{\frac{2\pi i}{N}3} \\ \dots \\ e^{\frac{2\pi i}{N}(N-3)} \\ e^{\frac{2\pi i}{N}(N-2)} \\ e^{\frac{2\pi i}{N}(N-1)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ e^{\frac{2\pi i}{N}2} \\ e^{\frac{2\pi i}{N}4} \\ e^{\frac{2\pi i}{N}6} \\ \dots \\ e^{\frac{2\pi i}{N}2(N-3)} \\ e^{\frac{2\pi i}{2}(N-2)} \\ e^{\frac{2\pi i}{2}(N-1)} \end{bmatrix}, \quad \dots, \begin{bmatrix} 1 \\ e^{\frac{2\pi i}{N}(N-1)} \\ e^{\frac{2\pi i}{N}2(N-1)} \\ e^{\frac{2\pi i}{N}3(N-1)} \\ \dots \\ e^{\frac{2\pi i}{N}(N-1)(N-3)} \\ e^{\frac{2\pi i}{N}(N-1)(N-2)} \\ e^{\frac{2\pi i}{N}(N-1)(N-1)} \end{bmatrix},$$

sind orthogonal im $\mathbb{C}^N$.
Wenn Sie Real- oder Imaginärteil so eines Vektors als Plot darstellen:
Jeder Plot sieht wie eine Sinus- oder Cosinus-Schwingung aus.

Frequenzanalyse eines Audiosignals

Die Datei `Sektglas1.wav` speichert den Klang eines billigen Sektglases. Wir wollten für Sie in mehreren Experimenten schöne Beispiele zur Frequenzanalyse zusammenstellen. Die Datei `Sektglas2.wav` zeigt, warum wir die Experimente vorzeitig beenden mussten . . .



Bildschirmfoto einer Frequenzanalyse mit Audacity. Auch in MATLAB können Sie Frequenzanalyse durchführen. Siehe Demo Datei `FourierSektglas.m`