

# Partielle Differentialgleichungen (kurzer Ausblick)

13. Vorlesung

170.021 Numerische Methoden 1

(170.026 Numerische Methoden I )

Clemens Brand, Erika Hausenblas, Alexander Steinicke

Montanuniversität Leoben

1. Feber 2024

# Partielle Differentialgleichungen–kurzer Ausblick

## ① Partielle Differentialgleichungen

Einleitung

Differentialoperatoren: Gradient, Divergenz, Laplace

Rechengebiet, Randbedingungen

Beispiele

Andere Formulierungen: Minimierungsaufgabe, schwache Form

Klassifikation LPDG 2. Ordnung

## ① Partielle Differentialgleichungen

Einleitung

Differentialoperatoren: Gradient, Divergenz, Laplace

Rechengebiet, Randbedingungen

Beispiele

Andere Formulierungen: Minimierungsaufgabe, schwache Form

Klassifikation LPDG 2. Ordnung

# Partielle Differentialgleichungen

Viele Gleichungen der Physik (Wellen-, Wärmeleitungs-, Potential-, Schrödinger-, Maxwell-, etc.) sind als partielle Differentialgleichungen formuliert.

Eine partielle Differentialgleichung (PDG) stellt Beziehungen zwischen **partiellen Ableitungen** von Funktionen auf.

## Beispiel: die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

## Beispiel: die Poisson-Gleichung

$$-\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = f$$

# Partielle Differentialgleichungen

Viele Gleichungen der Physik (Wellen-, Wärmeleitungs-, Potential-, Schrödinger-, Maxwell-, etc.) sind als partielle Differentialgleichungen formuliert.

Eine partielle Differentialgleichung (PDG) stellt Beziehungen zwischen **partiellen Ableitungen** von Funktionen auf.

## Beispiel: die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

## Beispiel: die Poisson-Gleichung

$$-\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = f$$

# Partielle Differentialgleichungen

Viele Gleichungen der Physik (Wellen-, Wärmeleitungs-, Potential-, Schrödinger-, Maxwell-, etc.) sind als partielle Differentialgleichungen formuliert.

Eine partielle Differentialgleichung (PDG) stellt Beziehungen zwischen **partiellen Ableitungen** von Funktionen auf.

## Beispiel: die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

## Beispiel: die Poisson-Gleichung

$$-\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = f$$

## ... und weitere Beispiele

### Wärmeleitungs-, Diffusionsgleichung

$$a \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t}$$

### und weitere Beispiele...

- ▶ Allgemeine Erhaltungsgleichungen, Konvektions-Diffusions-Prozesse
- ▶ Navier-Stokes-Gleichungen (Fluid Dynamik; System von PDGs, nichtlinear)
- ▶ Maxwell Gleichungen

MATLAB kann in der *PDE Modeler App* viele Standard-PDGs lösen. Siehe *Help-Examples!*

# Schreibweise für Differentialausdrücke

In den Beispielen der vorigen Folien trat der Laplace-Operator häufig auf.

## Schreibweisen für $\Delta u$

$\Delta u$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$
$\nabla^2 u$	$u_{xx} + u_{yy}$
$\nabla \cdot (\nabla u)$	$\operatorname{div} \operatorname{grad} u$
$u_{,ii}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right)$
etc.	etc.

Je nach Kontext und Koordinatensystem andere Schreibweise; gemeint ist immer dasselbe mathematische Objekt.



# Differentialausdrücke: Koordinatenfreie Interpretation

Denken Sie an Operatoren, nicht an irgendwelche  $xyz$ -Terme!

## Gradient eines Skalarfeldes

Ordnet einem skalaren Feld ein Vektorfeld zu. In jedem Punkt erfüllt der zugeordnete Vektor: Richtung = steilster Anstieg; Länge = Steigung.

## Divergenz eines Vektorfeldes

Ordnet einem Vektorfeld ein skalares Feld zu. Für ein infinitesimales Volumen gibt die Divergenz an, wieviel netto herausfließt (genauer: die Quelledichte)

## Laplace-Operator

Divergenz des Gradienten eines Skalarfeldes  $u$ . Interpretation: Krümmung, Durchhang; Wert  $u$  an einem Punkt ist kleiner als Mittel  $\bar{u}$  aller Werte in kleinem Abstand  $h$  im  $\mathbb{R}^n$ . Es gilt für  $h \rightarrow 0$ :  $u \rightarrow \bar{u} - \frac{h^2}{2n} \Delta u$ .

# Differentialausdrücke: Koordinatenfreie Interpretation

Denken Sie an Operatoren, nicht an irgendwelche  $xyz$ -Terme!

## Gradient eines Skalarfeldes

Ordnet einem skalaren Feld ein Vektorfeld zu. In jedem Punkt erfüllt der zugeordnete Vektor: Richtung = steilster Anstieg; Länge = Steigung.

## Divergenz eines Vektorfeldes

Ordnet einem Vektorfeld ein skalares Feld zu. Für ein infinitesimales Volumen gibt die Divergenz an, wieviel netto herausfließt (genauer: die Quelldichte)

## Laplace-Operator

Divergenz des Gradienten eines Skalarfeldes  $u$ . Interpretation: Krümmung, Durchhang; Wert  $u$  an einem Punkt ist kleiner als Mittel  $\bar{u}$  aller Werte in kleinem Abstand  $h$  im  $\mathbb{R}^n$ . Es gilt für  $h \rightarrow 0$ :  $u \rightarrow \bar{u} - \frac{h^2}{2n} \Delta u$ .

# Differentialausdrücke: Koordinatenfreie Interpretation

Denken Sie an Operatoren, nicht an irgendeine  $xyz$ -Terme!

## Gradient eines Skalarfeldes

Ordnet einem skalaren Feld ein Vektorfeld zu. In jedem Punkt erfüllt der zugeordnete Vektor: Richtung = steilster Anstieg; Länge = Steigung.

## Divergenz eines Vektorfeldes

Ordnet einem Vektorfeld ein skalares Feld zu. Für ein infinitesimales Volumen gibt die Divergenz an, wieviel netto herausfließt (genauer: die Quelledichte)

## Laplace-Operator

Divergenz des Gradienten eines Skalarfeldes  $u$ . Interpretation: Krümmung, Durchhang; Wert  $u$  an einem Punkt ist kleiner als Mittel  $\bar{u}$  aller Werte in kleinem Abstand  $h$  im  $\mathbb{R}^n$ . Es gilt für  $h \rightarrow 0$ :  $u \rightarrow \bar{u} - \frac{h^2}{2n} \Delta u$ .

# Laplace-Operator, näherungsweise

Unabhängig von Koordinatensystem oder Orientierung

In 2D: bestimme Wert  $u_P$  im Punkt  $P$ ; gehe einen (kleinem) Abstand  $h$  in die vier Himmelsrichtungen  $N, S, E, W$  und bestimme die Werte  $u_N, u_S, u_E, u_W$ . Dann gilt:

$$\Delta u = \frac{1}{h^2} (u_N + u_S + u_E + u_W - 4u_P) + O(h^2)$$

In 3D: gehe auch noch nach oben und unten und bestimme dort  $u_T, u_D$  (*Top, Down*). Dann gilt:

$$\Delta u = \frac{1}{h^2} (u_N + u_S + u_E + u_W + u_T + u_D - 6u_P) + O(h^2)$$

(wenn  $u$  in  $P$  mindestens 4-mal stetig differenzierbar ist)

Finite-Differenzen-Lösungsverfahren verwenden diese Näherungen.

# Laplace-Operator, näherungsweise

Unabhängig von Koordinatensystem oder Orientierung

In 2D: bestimme Wert  $u_P$  im Punkt  $P$ ; gehe einen (kleinem) Abstand  $h$  in die vier Himmelsrichtungen  $N, S, E, W$  und bestimme die Werte  $u_N, u_S, u_E, u_W$ . Dann gilt:

$$\Delta u = \frac{1}{h^2} (u_N + u_S + u_E + u_W - 4u_P) + O(h^2)$$

In 3D: gehe auch noch nach oben und unten und bestimme dort  $u_T, u_D$  (*Top, Down*). Dann gilt:

$$\Delta u = \frac{1}{h^2} (u_N + u_S + u_E + u_W + u_T + u_D - 6u_P) + O(h^2)$$

(wenn  $u$  in  $P$  mindestens 4-mal stetig differenzierbar ist)

Finite-Differenzen-Lösungsverfahren verwenden diese Näherungen.

# Laplace-Operator, näherungsweise

Unabhängig von Koordinatensystem oder Orientierung

In 2D: bestimme Wert  $u_P$  im Punkt  $P$ ; gehe einen (kleinem) Abstand  $h$  in die vier Himmelsrichtungen  $N, S, E, W$  und bestimme die Werte  $u_N, u_S, u_E, u_W$ . Dann gilt:

$$\Delta u = \frac{1}{h^2} (u_N + u_S + u_E + u_W - 4u_P) + O(h^2)$$

In 3D: gehe auch noch nach oben und unten und bestimme dort  $u_T, u_D$  (*Top, Down*). Dann gilt:

$$\Delta u = \frac{1}{h^2} (u_N + u_S + u_E + u_W + u_T + u_D - 6u_P) + O(h^2)$$

(wenn  $u$  in  $P$  mindestens 4-mal stetig differenzierbar ist)

Finite-Differenzen-Lösungsverfahren verwenden diese Näherungen.

# Rechengebiet, Randbedingungen

Zur Lösung einer PDG müssen zusätzliche Informationen vorliegen

- ▶ Rechengebiet  $\Omega$ : Im Inneren von  $\Omega$  gilt die Differentialgleichung
- ▶ Randbedingungen: legen Funktionswerte oder Ableitungen am Rand  $\partial\Omega$  fest

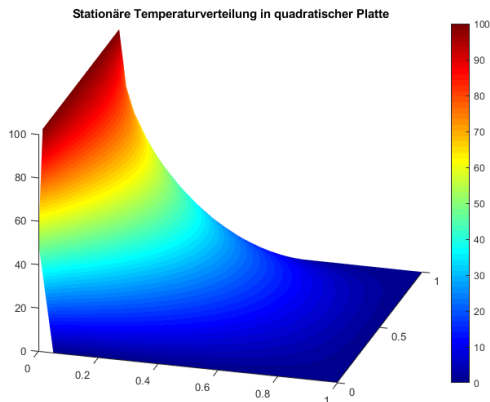
Beispiel: Laplace-Gleichung auf quadratischem Gebiet. Gesucht ist  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\begin{array}{ll} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega : 0 < x, y < 1 \\ u = 100 & \text{am linken Rand } \partial\Omega_1 : x = 0, 0 \leq y \leq 1 \\ u = 0 & \text{am Rand } \partial\Omega_2: \text{oben, unten und rechts} \end{array}$$

Beschreibt stationäre Temperaturverteilung (ohne Quellterme)

# Die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$

beschreibt stationäre Lösungen bei Wärmeleitung oder Diffusionsprozessen (ohne Quellterme; mit solchen  $\rightarrow$  Poisson-Gleichung).

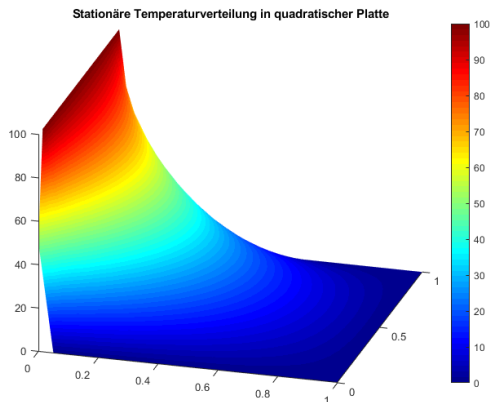


So sieht die Lösung aus, die  
MATLABs *PDE Modeller*  
berechnet



# Die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$

beschreibt stationäre Lösungen bei Wärmeleitung oder Diffusionsprozessen (ohne Quellterme; mit solchen  $\rightarrow$  Poisson-Gleichung).



So sieht die Lösung aus, die  
MATLABs *PDE Modeller*  
berechnet

# Die Poisson-Gleichung $-\Delta u = f$

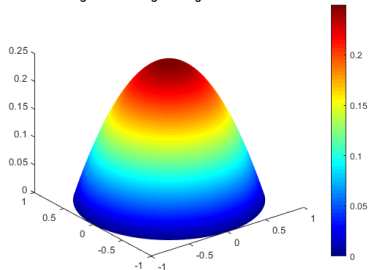
beschreibt z. B. Durchhang einer belasteten Membran, Potential bei gegebener Ladungsdichte. . .

Quellterm  $f = 1$

Rechengebiet  $\Omega$ : Einheitskreis

Randbedingung  $u = 0$  auf  $\partial\Omega$ .

Lösung der Poissongleichung auf Einheitskreis



Gezeigt: Numerisch berechnete Lösung. Es gibt eine einfache exakte Lösung:

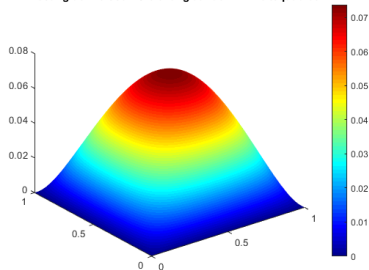
$$u(x, y) = \frac{1}{4}(1 - x^2 - y^2)$$

Quellterm  $f = 1$

Rechengebiet  $\Omega$ : Einheitsquadrat

Randbedingung  $u = 0$  auf  $\partial\Omega$ .

Lösung der Poisson-Gleichung auf dem Einheitsquadrat



Hier gibt es keinen einfachen Funktionsterm für die Lösung.

# Präzise Formulierung

Aus dem Kontext der Anwendungen in Physik und Technik ergibt sich normaler Weise, was bei der mathematischen Formulierung des Problems alles angegeben werden muss.

## 2D-Randwert-Problem für die Poisson-Gleichung

Gegeben sind ein offenes Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , eine Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und eine Funktion  $v : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

Gesucht ist eine Funktion  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ , die erfüllt:

$$\frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = f(x_1, x_2), \quad \forall (x_1, x_2) \in \Omega,$$
$$u|_{\partial\Omega} = v.$$

Die Mathematik untersucht und klärt: Existenz, Eindeutigkeit der Lösung; Zulässige Gebiete  $\Omega$  und Funktionenräume für  $f$  und  $v$ ; Stabilität (Einfluss kleiner Änderungen in  $f$  und  $v$ );

# Andere Formulierungen der Poisson-Gleichung

Näher an der physikalischen Interpretation, Ausgangspunkt moderner Lösungsverfahren

Klassische (starke) Form  $-\Delta u = f \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$

erfordert mindestens 2-mal differenzierbares  $u$ .

Minimierungsaufgabe: sucht jene Funktion  $u$ , für die

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u - 2uf \, dx \rightarrow \min!$$

Physikalische Interpretation: minimiere Energie des Systems.

Schwache Formulierung: sucht jene Funktion  $u$ , für die

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in C_0^{\infty}$$

Ausgangspunkt für Finite-Elemente-Verfahren. Softwarepaket NGSolve verlangt diese Form.

## Kurze Abschweifung: Algebraische Kurven 2. Ordnung

Welche Art von Kurve im  $\mathbb{R}^2$  wird durch diese Gleichung festgelegt?

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f$$

Wählen Sie im MATLAB-Skript `AlgebrKurvExp.m` (Zusatzmaterial) Werte für  $a, b, c, d, e$  und geben Sie an, welche Kurven MATLAB zeichnet:  
(A) Kreise (B) Ellipsen (C) Spiralen (D) Wellenlinien  
(E) Hyperbeln (F) Parabeln (G) Gerade (H) andere

## Kurze Abschweifung: Algebraische Kurven 2. Ordnung

Welche Art von Kurve im  $\mathbb{R}^2$  wird durch diese Gleichung festgelegt?

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f$$

Kurventyp hängt nur von  $b^2 - 4ac$  ab!

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac < 0 & \text{ Ellipsen} \\ > 0 & \text{ Hyperbeln} \\ = 0 & \text{ Parabeln} \end{aligned}$$

Eine Koordinatentransformation (Translation und Drehung) bringt die Kurven in die gewohnte Hauptlagenform!

## Kurze Abschweifung: Algebraische Kurven 2. Ordnung

Welche Art von Kurve im  $\mathbb{R}^2$  wird durch diese Gleichung festgelegt?

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f$$

Kurventyp hängt nur von  $b^2 - 4ac$  ab!

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac < 0 & \text{ Ellipsen} \\ > 0 & \text{ Hyperbeln} \\ = 0 & \text{ Parabeln} \end{aligned}$$

Eine Koordinatentransformation (Translation und Drehung) bringt die Kurven in die gewohnte Hauptlagenform!

## Kurze Abschweifung: Algebraische Kurven 2. Ordnung

Welche Art von Kurve im  $\mathbb{R}^2$  wird durch diese Gleichung festgelegt?

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f$$

Kurventyp hängt nur von  $b^2 - 4ac$  ab!

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac < 0 & \text{ Ellipsen} \\ > 0 & \text{ Hyperbeln} \\ = 0 & \text{ Parabeln} \end{aligned}$$

Eine Koordinatentransformation (Translation und Drehung) bringt die Kurven in die gewohnte Hauptlagenform!



# Klassifikation der LPDG 2. Ordng.

## Lineare PDG 2. Ordnung

$$Au_{xx} + Bu_{xt} + Cu_{tt} + Du_x + Eu_t + Fu = G$$

## Klassifikation

$B^2 - 4AC$	Typ der LPDGL
$< 0$	elliptisch
$= 0$	parabolisch
$> 0$	hyperbolisch

Eine Variablentransformation ganz analog zur Koordinatentransformation bei algebr. Kurven 2. Ordnung bringt die Gleichungen auf Standardform!

## Die prototypischen LPDG 2. Ordnung

Jede LPDG der Form  $Au_{xx} + Bu_{xt} + Cu_{tt} + Du_x + Eu_t + Fu = G$  lässt sich durch Variablentransformation auf eine der folgenden Formen bringen.

$$u_{xx} + u_{yy} = f$$

elliptisch: Laplace-, Poissongleichung.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

hyperbolisch: Wellengleichung.

$$u_t = au_{xx}$$

parabolisch: Wärmeleitungsgleichung.

Die verschiedenen Typen beschreiben völlig unterschiedliche Vorgänge. Sie brauchen unterschiedliche Arten von Randbedingungen. Es gibt jeweils unterschiedliche Lösungsverfahren.

## Die prototypischen LPDG 2. Ordnung

Jede LPDG der Form  $Au_{xx} + Bu_{xt} + Cu_{tt} + Du_x + Eu_t + Fu = G$  lässt sich durch Variablentransformation auf eine der folgenden Formen bringen.

$$u_{xx} + u_{yy} = f$$

elliptisch: Laplace-, Poissongleichung.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

hyperbolisch: Wellengleichung.

$$u_t = au_{xx}$$

parabolisch: Wärmeleitungsgleichung.

Die verschiedenen Typen beschreiben völlig unterschiedliche Vorgänge. Sie brauchen unterschiedliche Arten von Randbedingungen. Es gibt jeweils unterschiedliche Lösungsverfahren.

≈ 1800–1920 waren im Wesentlichen diese drei Gleichungstypen (zusammen mit PDGs erster Ordnung) theoretisch untersucht und verstanden. Viele aktuelle Anwendungen (Strömung, Festigkeit. . .) formulieren PDGs, die nicht so direkt in dieses einfache Klassifikationsschema passen.