

Ü 11 Zehnte Übungseinheit

Inhalt der zehnten Übungseinheit:

- Zweiter Kenntnissnachweis: Themengebiete
- Weitere Beispiele zu Eigenwertaufgaben und Einschrittverfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen, Fourierreihen, Fourieranalyse, Fast Fourier Transform (FFT)

Ü 11.1 Zweiter Kenntnissnachweis: Themengebiete

Der zweiten Kenntnissnachweis stellt Ihnen zwei Teilaufgaben aus den Themengebieten

- Eigenvektoren und Vektor-Iteration. Typische Beispiele: Aufgabe 64 und die hier folgenden Aufgaben 96 und 97.
- Systeme von Differentialgleichungen höherer Ordnung, Umformen auf Systeme 1. Ordnung, Typisch: Aufgaben 80–84.

Explizite und implizite Einschrittverfahren selbst implementiert: Aufgabe 68 mit Musterprogramm `GDGdemo.m` (klick!), weitere Aufgaben 98 und 99.

- Fourierreihen und Fouriermethoden. Typisch: Aufgaben des letzten Übungsblattes.

Ü 11.2 Vektor-Iteration, Eigenvektoren: Beispiele zur Wiederholung

Aufgabe 96: Random Walk

Das ist Aufgabe 64 in etwas anderer Einkleidung. Modelliert wird hier ein *Random Walk* oder auch ein *Markov-Prozess*. Es macht nichts, wenn Sie diese für viele Anwendungen wichtigen Fachbegriffe noch nicht kennen, hier begegnen sie Ihnen in einem anschaulichen Beispiel.

Die Skizze rechts zeigt vereinfacht das Straßennetz zwischen Hauptplatz und Bahnhof von Leoben. Eine Gruppe Studierender hat am Hauptplatz das nahe Semesterende etwas zu ausgiebig gefeiert und torkelt nun planlos durch das Uni-Viertel. An jedem der Punkte 1–10 wählt jede Person zufällig und mit gleicher Wahrscheinlichkeit eine der möglichen Richtungen. Dadurch verteilen sich alle nach einiger Zeit im Straßennetz.



Dieser fröhliche Abend lässt sich in folgender Form modellieren:

Ein Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{10}$ enthält in Komponente i die Anzahl der Personen, die sich gerade auf Punkt i oder auf dem Weg dorthin befinden. Eine Matrix $A = [a_{ij}]$ gibt in Spalte j an, mit welcher Wahrscheinlichkeit jemand Knoten j in Richtung i verlässt.

Dann gibt (etwas vereinfacht gesagt) das Matrix-Vektor-Produkt $A \cdot \mathbf{x}$ die Verteilung der Personen eine Zeiteinheit später an. Fortgesetzte Matrix-Vektor-Multiplikation führt zu einem stabilen Zustand: die Verteilung der Personen im Netzwerk ändert sich nicht mehr.

Beginnen Sie mit Startvektor $\mathbf{x}^{(0)} = [0; 0; \dots; 0; 100]$ Das bedeutet: Aufenthaltswahrscheinlichkeit 100% bei Knoten 10, die gesamte Gruppe startet beim Peter-Tunner-Park.

Setzen Sie als Matrix der Übergangs-Wahrscheinlichkeiten

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/4 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1/3 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

(Tipp: die üblichen PDF-Viewer erlauben, die Matrixelemente rauszukopieren; mit wenig Aufwand können sie in MATLAB-Dateien als Matrix übernommen werden.)

- Berechnen Sie ausgehend von $\mathbf{x}^{(0)}$ die Zustandsvektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)} &= A\mathbf{x}^{(0)} \\ \mathbf{x}^{(2)} &= A\mathbf{x}^{(1)} \\ &\vdots \\ \mathbf{x}^{(k)} &= A\mathbf{x}^{(k-1)} \end{aligned}$$

so lange, bis die Änderung in der 2-Norm $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_2 < 10^{-2}$ wird.

- Wie groß ist Komponente 3 von $\mathbf{x}^{(k)}$ (die Aufenthaltswahrscheinlichkeit einer Person am Knoten 3, bei der MUL)?

- Berechnen Sie auch mit MATLAB-Befehlen direkt den Eigenvektor zum betragsgrößten Eigenwert von A . Wie lautet der Eigenwert?
- Skalieren Sie den zugehörigen Eigenvektor so, dass die Summe der Komponenten 100 ergibt und vergleichen Sie mit dem Ergebnis der Vektor-Iteration. Sie sollten im Rahmen der Rechengenauigkeit Übereinstimmung feststellen können.

Aufgabe 97: Kredit(un)würdigkeit

Größere Banken kategorisieren die Kreditwürdigkeit ihrer Kunden gemäß einem Stufensystem: von 1=„höchste Kreditwürdigkeit“ bis zu 5=„kein Kredit möglich“. Monatlich werden Daten erhoben, die den Wechsel der Kunden zwischen den Stufen beschreiben. Nehmen Sie folgendes Modell, gegeben durch die untenstehende (fiktive) Matrix A an, das diesen Wechsel darstellt:

$$A = \begin{pmatrix} 0.92 & 0.06 & 0.03 & 0.003 & 0.001 \\ 0.07 & 0.8 & 0.14 & 0.007 & 0.0007 \\ 0.005 & 0.1 & 0.62 & 0.15 & 0.012 \\ 0.003 & 0.03 & 0.11 & 0.44 & 0.46 \\ 0.002 & 0.01 & 0.1 & 0.4 & 0.52 \end{pmatrix}$$

Hierbei gibt der Eintrag in Zeile i und Spalte j an, wieviel Prozent der Kunden in Stufe j im nächsten Monat in Stufe i wechseln werden. Falls man eine Verteilung v_0 der Kunden in die Stufen 1–5 anteilmäßig gegeben hat, etwa

$$v_0 = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.3 \\ 0.2 \end{pmatrix},$$

so erhält man die Verteilung für den Folgemonat v_1 durch $v_1 = Av_0$.

Berechnen Sie die Verteilung nach drei Monaten mit der gegebenen Ausgangsverteilung v_0 .

Welche Verteilung v_s verändert sich gegenüber den monatlichen Stufenwechseln nicht? Schreiben Sie diese Fragestellung als Eigenwertproblem an (als Kommentar in Ihrem `.m-File`). Wie groß ist der Kundenanteil in Stufe 5?

Welche anderen Eigenwerte besitzt diese Matrix noch?

Ü 11.3 Gewöhnliche Differentialgleichungen: Weitere explizite und implizite Verfahren

Aufgabe 98: Implizites Trapez-Verfahren

Ein Schritt des *impliziten Trapez-Verfahrens* zur numerischen Lösung einer Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ lautet

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{2} \left[f(x, y(x)) + f(x+h, y(x+h)) \right].$$

- (a) Rechnen Sie für die Differentialgleichung $y' = (1-x)y$ mit Schrittweite $h = 1/2$ ausgehend von der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ einen Näherungswert für $y(3)$.

- (b) Wiederholen Sie die Rechnung mit $h = 1/4$ und geben sie auch dafür den Endwert $y(3)$ an.
- (c) Der 12-stellig genaue Wert ist $y(3) = 0,223\,130\,160\,148$. Vergleichen Sie die Diskretisierungsfehler aus den Ergebnissen (2a) und (2b). In welchem Verhältnis ϵ_1/ϵ_2 stehen die Fehler? Welche Fehlerordnung p vermuten Sie daher?

Aufgabe 99: Rocket Science aus dem vorigen Jahrtausend

In einem NASA Report aus 1969 beschreibt Erwin Fehlberg folgendes Einschritt-Verfahren

$$F(x, y, h) = \frac{1}{512}(k_1 + 510k_2 + k_3) \quad \text{mit}$$

$$k_1 = f(x, y), \quad k_2 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_1\right), \quad k_3 = f\left(x + h, y + \frac{h}{256}(k_1 + 255k_2)\right)$$

- (a) Implementieren Sie das Verfahren für die Differentialgleichung $y' = \sin(y) + x$ und rechnen Sie mit Schrittweite $h = 1/2$ ausgehend von der Anfangsbedingung $y(1) = -1$ einen Näherungswert für $y(4)$.
- (b) Wiederholen Sie die Rechnung mit $h = 1/4$ und geben sie auch dafür den Endwert $y(4)$ an.
- (c) Der (auf 12 Nachkommastellen) genaue Wert ist $y(4) = 5,787\,447\,802\,140$. Vergleichen Sie die Diskretisierungsfehler aus den Ergebnissen (2a) und (2b). In welchem Verhältnis ϵ_1/ϵ_2 stehen die Fehler? Welche Fehlerordnung p vermuten Sie daher?

Aufgabe 100: Fouriertrafo, Filtern

Laden Sie die Datei

<https://www.unileoben.ac.at/fileadmin/shares/amat/docs/num1/ss21/klang3.wav> herunter und lesen Sie die Daten mittels

```
[X,fs] = audioread('klang3.wav');
```

ein. Der Vektor X enthält die Signal-Messwerte, aufgezeichnet mit der Abtast-Frequenz (sampling frequency) fs (in Hertz). Das heißt, es liegen pro Sekunde fs Datenpunkte vor. Das Signal dauert somit von $t = 0$ bis $t = (\text{Anzahl der Datenpunkte} - 1) / \text{Abtastfrequenz}$.

Wählen Sie aus dem Vektor nur jene Datenpunkte, die dem Zeitraum $0.2 \leq t < 5$ entsprechen (überprüfen Sie, dass eine gerade Anzahl an Werten vorliegt) und arbeiten Sie im Folgenden mit diesen Daten.

Ihre Aufgaben:

1. Stellen Sie das Signal im neuen, eingeschränkten Zeitbereich dar.
2. Führen Sie eine Fouriertransformation durch. Bestimmen Sie den Maximalwert der Amplitude (Absolutbetrag) im Fourierraum und geben Sie die zugehörige Frequenz im Moodle-Testfenster an (ganzzahlig gerundet): $f = \dots$ Hz.
3. Filtern Sie das Signal, indem Sie im Fourierraum alle Koeffizienten, die höher als 300 Hz sind, auf 0 setzen. Rekonstruieren Sie das gefilterte Signal im Zeitbereich und stellen Sie es dar.