Balkenbiegung

Rechnungen zum Balkenelement, vergleiche Kapitel 8 aus Young W. Hwon, Hyochoong Bang: *The Finite Element Method using MATLAB*, CRC Mechanical Engineering Series.

Wir rechnen nach, hoffentlich wird das hier einfacher, als es im Buch präsentiert ist.

Ansatzfunktionen

H_1 bis H_4 in der Form

$$H = H(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \quad , \qquad H'(x) = b + 2cx + 3dx^2$$

erfüllen vier Gleichungen, am Beispiel $H = H_1$

$$\begin{aligned} H(0) &= 1 \\ H(\ell) &= 0 \\ H'(0) &= 0 \\ H'(\ell) &= 0 \end{aligned}$$

Ergebnisse hier in den Notizen sind für$\ell = 1$ gerechnet; Wir rechnen in MATLAB mit allgemeinem ℓ nach.

Einsetzen in Ansatz führt auf System

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{mit einer Matrix } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Aus der Lösung bestimmt man H_1 einfach als inneres Produkt mit einem Vektor von x-Potenzen:

$$H_1 = \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}$$

Die Koeffizienten-Vektoren für H_2 bis H_4 erhält man mit den entsprechenden Einheitsvektoren als rechte Seiten. Alle vier Einheitsvektoren zusammengefasst ergeben die Einheitsmatrix. Die vier Lösungsvektoren sind daher die Spalten von A^{-1}. Es gilt also

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{bmatrix} = (A^{-1})^T \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x^3 - 3x^2 + 1 \\ x^3 - 2x^2 + x \\ -2x^3 + 3x^2 \\ x^3 - x^2 \end{bmatrix}$$

Vergleiche mit (8.1.8) im Hwon-Buch!

Die lokale Massenmatrix ergibt sich durch

$$\int_0^1 \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 & H_2 & H_3 & H_4 \end{bmatrix} dx$$

und die lokale Steifigkeitsmatrix zu

$$\int_0^1 \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{bmatrix}'' \begin{bmatrix} H_1 & H_2 & H_3 & H_4 \end{bmatrix}'' dx$$