Numerische Methoden II, 170 024, und Übungen, 170 025
Vorlesungsnotizen, 11. Mai 2014

Lineare Dreieckselemente

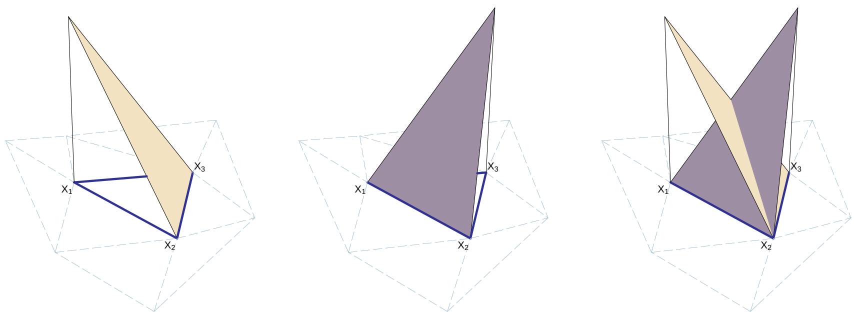
Basisfunktionen ψ_i sind Pyramiden mit Höhe 1 und Spitzen an den entsprechenden Knotenpunkten $\mathbf{x}_i$.

Das Integral

$$\int_\Omega \nabla\psi_i \cdot \nabla\psi_j d\mathbf{x}$$

zerfällt in eine Summe von Integralen über die einzelnen Dreiecke der Triangulation. Nur solche Dreiecke, auf denen sowohl $\nabla\psi_i$ und $\nabla\psi_j$ ungleich 0 sind, liefern tatsächlich Beiträge.

Hier ist schematisch der lineare Verlauf zweier Basisfunktionen ψ_1 und ψ_3 innerhalb des Dreiecks $\mathbf{x}_1$,$\mathbf{x}_2$,$\mathbf{x}_3$ dargestellt – zuerst jede Funktion für sich, zuletzt beide überlagert.



Es gibt nur drei Basisfunktionen, für die das Integral auf dem Dreieck $\mathbf{x}_1$,$\mathbf{x}_2$,$\mathbf{x}_3$ nicht verschwindende Beiträge liefern kann:

ψ_1 mit Wert 1 in $\mathbf{x}_1$, jeweils Wert 0 in $\mathbf{x}_2$ und $\mathbf{x}_3$
ψ_2 mit Wert 1 in $\mathbf{x}_2$, jeweils Wert 0 in $\mathbf{x}_3$ und $\mathbf{x}_1$
ψ_3 mit Wert 1 in $\mathbf{x}_3$, jeweils Wert 0 in $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$

Beitrag eines Dreiecks zur Steifigkeitsmatrix

Ganz direkter Ansatz: Für Eckpunkte $\mathbf{x}_1$,$\mathbf{x}_2$,$\mathbf{x}_3$ mit Koordinaten $\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}$

Lokale Basisfunktion $\psi_1 = \psi_1(x,y)$ hat die Form

$$\psi_1 = a + bx + cy$$

mit Koeffizienten a,b und c, die durch das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{mit Matrix } A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

bestimmt sind. Der Gradient von ψ_1 ist $\nabla\psi_1 = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}$, das ist die zweite und dritte Komponente des Lösungsvektors $A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Weil $\begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, gilt in Matrix-Schreibweise:

$$\nabla\psi_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

und entsprechend

$$\nabla\psi_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \nabla\psi_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad .$$

Man bestimmt (oder lässt ein Computeralgebra-System berechnen):

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix}$$

und daraus

$$\nabla\psi_1 = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 \\ x_3 - x_2 \end{bmatrix} \quad , \quad \nabla\psi_2 = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} y_3 - y_1 \\ x_1 - x_3 \end{bmatrix} \quad , \quad \nabla\psi_3 = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} y_1 - y_2 \\ x_2 - x_1 \end{bmatrix} \quad .$$

Die Gradientenvektoren sind konstant, und somit auch alle inneren Produkte $\nabla\psi_i \cdot \nabla\psi_j$. Die Integration über das Dreieck lässt sich daher ganz einfach nach der Formel „Grundfläche mal Höhe“ ausführen. Die Dreiecksfläche ist ebenfalls durch eine Determinante bestimmt, die Formel ist: Fläche $= |\det A|/2$.

Referenzdreieck und Variablen-Transformation

Betrachte ein Referenzdreieck in einem $\xi\eta$-Koordinatensystem mit Eckpunkten $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Die lokalen Basisfunktionen in diesem Referenzdreieck sind

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_1 &= 1 - \xi - \eta \\ \hat{\psi}_2 &= \xi \\ \hat{\psi}_3 &= \eta \end{aligned}$$

Die Transformation $\xi\eta$-Koordinaten auf xy-Koordinaten lautet

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \xi \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix} + \eta \begin{bmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \end{bmatrix}$$

Diese Koordinatentransformation bildet die Eckpunkte des Referenzdreiecks auf die „richtigen" Eckpunkte x_1,x_2,x_3 ab.

Die Basisfunktionen $\hat{\psi}_i$ entsprechen dadurchden „richtigen" Basisfunktionen ψ_i:

$$\psi_i(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)) = \hat{\psi}_i(\xi,\eta)$$

Die Jacobimatrix dieser Transformation ist

$$J = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}$$

und deren Determinante

$$\det J = x_3(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1)$$

ist betragsmäßig gleich der doppelten Dreiecksfläche. (Es ist $\det J = \det A$ mit A von vorhin.)

Wenn in $\psi_i = \psi_i(x,y)$ die Koordinaten transformiert werden:

$$\hat{\psi}_i = \hat{\psi}_i(\xi,\eta) = \psi_i(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)),$$

dann transformiert sich $\nabla\psi_i$ nach der Kettenregel

$$\nabla\psi_i = (J^T)^{-1}\hat{\nabla}\hat{\psi}_i$$

wobei hier

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \text{ und } \hat{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Die Gradienten $\hat{\nabla}\hat{\psi}_i$ sind Vektoren mit einfachen Zahlenwerten:

$$\hat{\nabla}\hat{\psi}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad , \qquad \hat{\nabla}\hat{\psi}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \qquad \hat{\nabla}\hat{\psi}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Die inverse und transponierte Jacobimatrix ist

$$(J^T)^{-1} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix}$$

Somit ergeben sich für die „richtigen“ Gradienten dieselben Werte wie vorhin.

Der Zusammenhang zwischen Integration über das „richtige“ Dreieck im xy-Koordinatensystem und im $\xi\eta$-Koordinatensystem über das Referenzdreieck lässt sich schreiben als

$$\iint_{\text{Dreieck}} \ldots dx\, dy = |\det J| \int_{\xi=0}^{1} \int_{\eta=0}^{1-xi} \ldots d\eta\, d\xi$$

Bei konstantem Integranden, so wie hier, ist die Integration ganz einfach. Die Transformation zahlt sich dann aus, wenn der Integrand noch von ξ und η abhängt.