Numerische Methoden II, 170 024, und Übungen, 170 025
Übungsunterlagen, 6. Mai 2015

Poisson-Modellproblem für das Einheitsquadrat

$$\Delta u = -1 \qquad \text{in } \Omega = (0,1)^2 \quad \text{(das heißt, im Einheitsquadrat)} \tag{1}$$

$$u = 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega \tag{2}$$

Als *klassische Lösung* liegt $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, das heißt, u ist in Ω zweimal stetig differenzierbar (damit Gleichung (1) sinnvoll ist) und stetig in $\bar{\Omega}$, das ist Ω und sein Rand $\partial\Omega$ (damit Gleichung (2) sinnvoll ist).

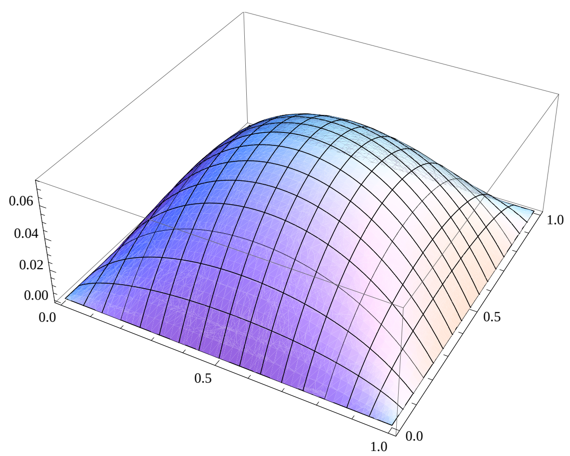
Lösung mit Greenschen Funktionen

Die Greensche Funktion $G(x,y,x',y')$ ist die Lösung der Poisson-Gleichung (1) mit Randbedingung (2) für eine Punktquelle der Stärke 1 an der Stelle (x',y').

Die Lösung u ergibt sich als Integral von Greenscher Funktion mal Quellterm (hier konstant -1) über $0 < x',y' < 1$. (Die Greensche Funktion für dieses Problem hat allerdings auch keine einfache Form. Sie lässt sich als Reihenentwicklung angeben.)

Hier das Ergebnis:

$$u(x,y) = \frac{4}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(2n+1)\pi x]}{(2n+1)^3} \left\{ 1 - \frac{\cosh[(2n+1)\pi(y-\frac{1}{2})]}{\cosh[(2n+1)\pi/2]} \right\} \tag{3}$$



Das entsprechende Variationsproblem – gesucht ist Minimum eines Integrals

$$\mathcal{I}(u) = \min! \qquad \text{mit } \mathcal{I}(u) = \int_0^1 \int_0^1 \nabla u \cdot \nabla u - 2u \, dx dy \tag{4}$$

Gesucht ist das Minimum im Raum aller Funktionen, für die $\mathcal{I}(u)$ und die Randbedingung (2) sinnvoll sind: $u \in H_0^1(\Omega)$. Das ist (etwas vereinfacht gesagt) der Raum aller Funktionen, die mitsamt ihrer ersten Ableitungen in Ω *quadratintegrabel* sind und am Rand verschwinden.

Eine Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ dieses *Variationsproblems* heißt *schwache Lösung*.

Das Verfahren von Ritz sucht das Minimum nicht unter „allen“ Funktionen, sondern für einen Ansatz von u als endliche *Linearkombination von Basisfunktionen*:

$$u = a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \cdots + a_m\psi_m$$

Die Basisfunktionen sind dabei so zu wählen, dass jede von ihnen die Randbedingung (2) erfüllt.

Konkret wäre Ansatz mit Polynomen möglich:

$$\begin{aligned} u =& a_1 \, x(1-x)y(1-y) + \\ & a_2 \, x^2(1-x)^2 y(1-y) + \\ & a_3 \, x(1-x)y^2(1-y)^2 + \\ & a_4 \, x^2(1-x)^2 y^2(1-y)^2 + \ldots \end{aligned}$$

Bei diesem Ansatz ist auch schon eine Symmetrie-Überlegung berücksichtigt: Eine Substitution $x \to 1-x$ oder $y \to 1-y$ muss u unverändert lassen. Ebenso muss die Lösung gegenüber Vertauschen von x und y symmetrisch sein. Deswegen müssen die Koeffizienten a_2 und a_3 gleich sein. Wir können deswegen auch gleich den Ansatz

$$\begin{aligned} u =& a_1 \, x(1-x)y(1-y) + \\ & a_2 \left[x^2(1-x)^2 y(1-y) + x(1-x)y^2(1-y)^2 \right] + \\ & a_3 \, x^2(1-x)^2 y^2(1-y)^2 + \ldots \end{aligned}$$

wählen.

Man sieht schon: Die Wahl der Basisfunktionen ist nicht ganz trivial. Die exakte Lösung muss sich jedenfalls möglichst gut durch eine Linearkombination von Basisfunktionen darstellen lassen.

Der *Approximationssatz von Weierstraß* besagt, dass sich jede stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall beliebig genau durch Polynome gleichförmig approximieren lässt.

Es folgt daraus nicht unmittelbar, aber es lässt sich (mit einigem technischen Aufwand) zeigen, dass sich auch das Minimum $\mathcal{I}(u)$ mit Polynomfunktionen beliebig genau erreichen lässt, und dass sich diese Polynome beliebig genau der schwachen Lösung annähern.

Erster Versuch: nur eine einzige Basisfunktion Damit ist die Minimierungsaufgabe ganz einfach:

$$u = a_1\psi_1, \qquad \mathcal{I}(u) = a_1^2 \int_\Omega \nabla\psi_1 \cdot \nabla\psi_1 \, d\mathbf{x} - 2a_1 \int_\Omega \psi_1 \, d\mathbf{x}$$

Die beiden Integrale lassen sich, da ψ_1 gegeben ist, auswerten und liefern Koeffizienten

$$k = \int_\Omega \nabla\psi_1 \cdot \nabla\psi_1 \, d\mathbf{x}, \quad b = \int_\Omega \psi_1 \, d\mathbf{x}$$

Die Minimierungsaufgabe lautet somit:

$$a_1^2 k - 2a_1 b = \min!$$

Differenzieren und Nullsetzen der Ableitung führt auf die Gleichung

$$k a_1 = b$$

und bestimmt dadurch a_1:

$$a_1 = \frac{b}{k}$$

Weitere Versuche: siehe MATLAB-Skript!