Partielle Differentialgleichungen (kurzer Ausblick)

13. Vorlesung

170.021 Numerische Methoden 1

(170.026 Numerische Methoden I)

Clemens Brand, Erika Hausenblas, Alexander Steinicke

Montanuniversität Leoben

22. Juni 2023

Gliederung 13. Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen

Viele Gleichungen der Physik (Wellen-, Wärmeleitungs-, Potential-, Schrödinger-, Maxwell-, etc.) sind als partielle Differentialgleichungen formuliert.

Eine partielle Differentialgleichung (PDG) stellt Beziehungen zwischen partiellen Ableitungen von Funktionen auf.

Beispiel: die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Beispiel: die Poisson-Gleichung

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = f$$

Partielle Differentialgleichungen

Viele Gleichungen der Physik (Wellen-, Wärmeleitungs-, Potential-, Schrödinger-, Maxwell-, etc.) sind als partielle Differentialgleichungen formuliert.
Eine partielle Differentialgleichung (PDG) stellt Beziehungen zwischen partiellen Ableitungen von Funktionen auf.

Beispiel: die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Beispiel: die Poisson-Gleichung

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = f$$

Partielle Differentialgleichungen

Viele Gleichungen der Physik (Wellen-, Wärmeleitungs-, Potential-, Schrödinger-, Maxwell-, etc.) sind als partielle Differentialgleichungen formuliert.

Eine partielle Differentialgleichung (PDG) stellt Beziehungen zwischen partiellen Ableitungen von Funktionen auf.

Beispiel: die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Beispiel: die Poisson-Gleichung

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = f$$

. . . und weitere Beispiele

Wärmeleitungs-, Diffusionsgleichung

$$a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial u}{\partial t}$$

und weitere Beispiele. . .

- Allgemeine Erhaltungsgleichungen, Konvektions-Diffusions-Prozesse
- Navier-Stokes-Gleichungen (Fluid Dynamik; System von PDGs, nichtlinear)
- Maxwell Gleichungen

MATLAB kann in der *PDE Modeler App* viele Standard-PDGs lösen. Siehe *Help-Examples*!

Schreibweise für Differentialausdrücke

In den Beispielen der vorigen Folien trat der Laplace-Operator häufig auf.

Schreibweisen für Δu

$$\begin{array}{rr}
\Delta u & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
\nabla^2 u & u_{xx} + u_{yy} \\
\nabla \cdot (\nabla u) & \operatorname{div} \operatorname{grad} u \\
u_{,ii} & \dfrac{1}{r^2} \dfrac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \dfrac{\partial u}{\partial r} \right) \\
\text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}$$

Je nach Kontext und Koordinatensystem andere Schreibweise; gemeint ist immer dasselbe mathematische Objekt.

Differentialausdrücke: Koordinatenfreie Interpretation

Denken Sie an Operatoren, nicht an irgendwelche *xyz*-Terme!

Gradient eines Skalarfeldes

Ordnet einem skalaren Feld ein Vektorfeld zu. In jedem Punkt erfüllt der zugeordnete Vektor: Richtung = steilster Anstieg; Länge = Steigung.

Divergenz eines Vektorfeldes

Ordnet einem Vektorfeld ein skalares Feld zu. Für ein infinitesimales Volumen gibt die Divergenz an, wieviel netto herausfließt (genauer: die Quelldichte)

Laplace-Operator

Divergenz des Gradienten eines Skalarfeldes u. Interpretation: Krümmung, Durchhang; Wert u an einem Punkt ist kleiner als Mittel $\bar{u}$ aller Werte in kleinem Abstand h im $\mathbb{R}^n$. Es gilt für $h \to 0$: $u \to \bar{u} - \frac{h^2}{2n} \Delta u$.

Differentialausdrücke: Koordinatenfreie Interpretation

Denken Sie an Operatoren, nicht an irgendwelche *xyz*-Terme!

Gradient eines Skalarfeldes

Ordnet einem skalaren Feld ein Vektorfeld zu. In jedem Punkt erfüllt der zugeordnete Vektor: Richtung = steilster Anstieg; Länge = Steigung.

Divergenz eines Vektorfeldes

Ordnet einem Vektorfeld ein skalares Feld zu. Für ein infinitesimales Volumen gibt die Divergenz an, wieviel netto herausfließt (genauer: die Quelldichte)

Laplace-Operator

Divergenz des Gradienten eines Skalarfeldes u. Interpretation: Krümmung, Durchhang; Wert u an einem Punkt ist kleiner als Mittel $\bar{u}$ aller Werte in kleinem Abstand h im $\mathbb{R}^n$. Es gilt für $h \to 0$: $u \to \bar{u} - \frac{h^2}{2n}\Delta u$.

Differentialausdrücke: Koordinatenfreie Interpretation

Denken Sie an Operatoren, nicht an irgendwelche *xyz*-Terme!

Gradient eines Skalarfeldes

Ordnet einem skalaren Feld ein Vektorfeld zu. In jedem Punkt erfüllt der zugeordnete Vektor: Richtung = steilster Anstieg; Länge = Steigung.

Divergenz eines Vektorfeldes

Ordnet einem Vektorfeld ein skalares Feld zu. Für ein infinitesimales Volumen gibt die Divergenz an, wieviel netto herausfließt (genauer: die Quelldichte)

Laplace-Operator

Divergenz des Gradienten eines Skalarfeldes u. Interpretation: Krümmung, Durchhang; Wert u an einem Punkt ist kleiner als Mittel $\bar{u}$ aller Werte in kleinem Abstand h im $\mathbb{R}^n$. Es gilt für $h \to 0$: $u \to \bar{u} - \frac{h^2}{2n}\Delta u$.

Laplace-Operator, näherungsweise

Unabhängig von Koordinatensystem oder Orientierung

In 2D: bestimme Wert u_P im Punkt P; gehe einen (kleinem) Abstand h in die vier Himmelsrichtungen N, S, E, W und bestimme die Werte u_N, u_S, u_E, u_W. Dann gilt:

$$\Delta u = \frac{1}{h^2}\left(u_N + u_S + u_E + u_W - 4u_P\right) + O(h^2)$$

In 3D: gehe auch noch nach oben und unten und bestimme dort u_T, u_D (*Top, Down*). Dann gilt:

$$\Delta u = \frac{1}{h^2}\left(u_N + u_S + u_E + u_W + u_T + u_D - 6u_P\right) + O(h^2)$$

(wenn u in P mindestens 4-mal stetig differenzierber ist)

Finite-Differenzen-Lösungsverfahren verwenden diese Näherungen.

Laplace-Operator, näherungsweise

Unabhängig von Koordinatensystem oder Orientierung

In 2D: bestimme Wert u_P im Punkt P; gehe einen (kleinem) Abstand h in die vier Himmelsrichtungen N, S, E, W und bestimme die Werte u_N, u_S, u_E, u_W. Dann gilt:

$$\Delta u = \frac{1}{h^2}(u_N + u_S + u_E + u_W - 4u_P) + O(h^2)$$

In 3D: gehe auch noch nach oben und unten und bestimme dort u_T, u_D (*Top, Down*). Dann gilt:

$$\Delta u = \frac{1}{h^2}(u_N + u_S + u_E + u_W + u_T + u_D - 6u_P) + O(h^2)$$

(wenn u in P mindestens 4-mal stetig differenzierber ist)

Finite-Differenzen-Lösungsverfahren verwenden diese Näherungen.

Laplace-Operator, näherungsweise

Unabhängig von Koordinatensystem oder Orientierung

In 2D: bestimme Wert u_P im Punkt P; gehe einen (kleinem) Abstand h in die vier Himmelsrichtungen N, S, E, W und bestimme die Werte u_N, u_S, u_E, u_W. Dann gilt:

$$\Delta u = \frac{1}{h^2}\left(u_N + u_S + u_E + u_W - 4u_P\right) + O(h^2)$$

In 3D: gehe auch noch nach oben und unten und bestimme dort u_T, u_D (*Top, Down*). Dann gilt:

$$\Delta u = \frac{1}{h^2}\left(u_N + u_S + u_E + u_W + u_T + u_D - 6u_P\right) + O(h^2)$$

(wenn u in P mindestens 4-mal stetig differenzierber ist)

Finite-Differenzen-Lösungsverfahren verwenden diese Näherungen.

Rechengebiet, Randbedingungen

Zur Lösung einer PDG müssen zusätzliche Informationen vorliegen

- Rechengebiet Ω: Im Inneren von Ω gilt die Differentialgleichung
- Randbedingungen: legen Funktionswerte oder Ableitungen am Rand $\partial\Omega$ fest

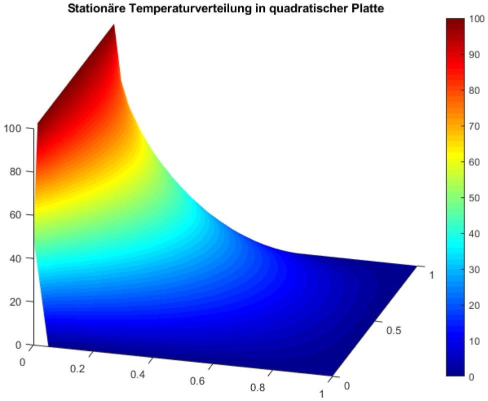
Beispiel: Laplace-Gleichung auf quadratischem Gebiet. Gesucht ist $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= 0 && \text{in } \Omega : 0 < x, y < 1 \\
u &= 100 && \text{am linken Rand } \partial\Omega_1 : x = 0, 0 \le y \le 1 \\
u &= 0 && \text{am Rand } \partial\Omega_2\text{: oben, unten und rechts}
\end{aligned}
$$

Beschreibt stationäre Temperaturverteilung (ohne Quellterme)

Die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$

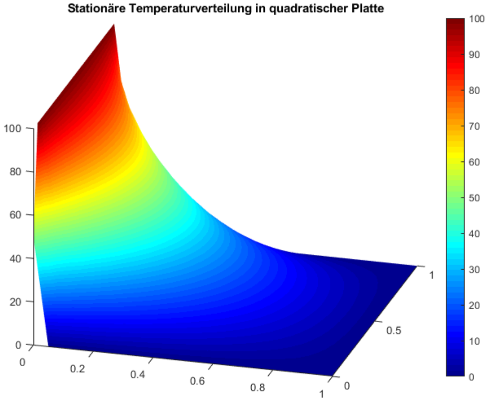
beschreibt stationäre Lösungen bei Wärmeleitung oder Diffusionsprozessen (ohne Quellterme; mit solchen $\rightarrow$ Poisson-Gleichung).



So sieht die Lösung aus, die MATLABs *PDE Modeller* berechnet

Die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$

beschreibt stationäre Lösungen bei Wärmeleitung oder Diffusionsprozessen (ohne Quellterme; mit solchen $\rightarrow$ Poisson-Gleichung).

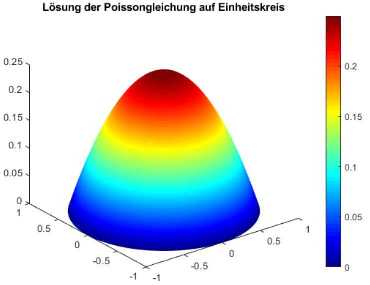


So sieht die Lösung aus, die MATLABs *PDE Modeller* berechnet

Die Poisson-Gleichung $-\Delta u = f$

beschreibt z. B. Durchhang einer belasteten Membran, Potential bei gegebener Ladungsdichte...

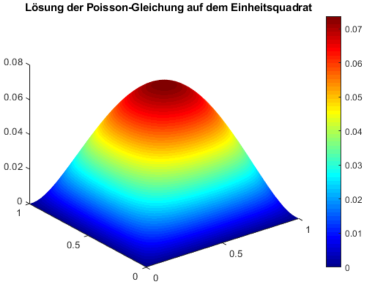
Quellterm $f = 1$
Rechengebiet Ω: Einheitskreis
Randbedingung $u = 0$ auf $\partial\Omega$.



Gezeigt: Numerisch berechnete Löung. Es gibt eine einfache exakte Lösung:

$$u(x, y) = \frac{1}{4}(1 - x^2 - y^2)$$

Quellterm $f = 1$
Rechengebiet Ω: Einheitsquadrat
Randbedingung $u = 0$ auf $\partial\Omega$.



Hier gibt es keinen einfachen Funktionsterm für die Lösung.

Präzise Formulierung

Aus dem Kontext der Anwendungen in Physik und Technik ergibt sich normaler Weise, was bei der mathematischen Formulierung des Problems alles angegeben werden muss.

2D-Randwert-Problem für die Poisson-Gleichung

Gegeben sind ein offenes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und eine Funktion $v : \partial\Omega \to \mathbb{R}$.
Gesucht ist eine Funktion $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$, die erfüllt:

$$\frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = f(x_1, x_2), \quad \forall (x_1, x_2) \in \Omega,$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = v.$$

Die Mathematik untersucht und klärt: Existenz, Eindeutigkeit der Lösung; Zulässige Gebiete Ω und Funktionenräume für f und v; Stabilität (Einfluss kleiner Änderungen in f und v);

Andere Formulierungen der Poisson-Gleichung

Näher an der physikalischen Interpretation, Ausgangspunkt moderner Lösungsverfahren

Klassische (starke) Form $-\Delta u = f \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$

erfordert mindestens 2-mal differenzierbares u.

Minimierungsaufgabe: sucht jene Funktion u, für die

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u - 2uf \; dx \to \min!$$

Physikalische Interpretation: minimiere Energie des Systems.

Schwache Formulierung: sucht jene Funktion u, für die

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx = \int_\Omega fv \; dx \quad \forall v \in C_0^\infty$$

Ausgangspunkt für Finite-Elemente-Verfahren. Softwarepaket NGSolve verlangt diese Form.

Kurze Abschweifung: Algebraische Kurven 2. Ordnung

Welche Art von Kurve im $\mathbb{R}^2$ wird durch diese Gleichung festgelegt?

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f$$

Wählen Sie im MATLAB-Skript `AlgebrKurvExp.m` (Zusatzmaterial) Werte für a, b, c, d, e und geben Sie an, welche Kurven MATLAB zeichnet:

(A) Kreise (B) Ellipsen (C) Spiralen (D) Wellenlinien

(E) Hyperbeln (F) Parabeln (G) Gerade (H) andere

Kurze Abschweifung: Algebraische Kurven 2. Ordnung

Welche Art von Kurve im $\mathbb{R}^2$ wird durch diese Gleichung festgelegt?

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f$$

Kurventyp hängt nur von $b^2 - 4ac$ ab!

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &< 0 \text{ Ellipsen} \\ &> 0 \text{ Hyperbeln} \\ &= 0 \text{ Parabeln} \end{aligned}$$

Eine Koordinatentransformation (Translation und Drehung) bringt die Kurven in die gewohnte Hauptlagenform!

Kurze Abschweifung: Algebraische Kurven 2. Ordnung

Welche Art von Kurve im $\mathbb{R}^2$ wird durch diese Gleichung festgelegt?

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f$$

Kurventyp hängt nur von $b^2 - 4ac$ ab!

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &< 0 \text{ Ellipsen} \\ &> 0 \text{ Hyperbeln} \\ &= 0 \text{ Parabeln} \end{aligned}$$

Eine Koordinatentransformation (Translation und Drehung) bringt die Kurven in die gewohnte Hauptlagenform!

Kurze Abschweifung: Algebraische Kurven 2. Ordnung

Welche Art von Kurve im $\mathbb{R}^2$ wird durch diese Gleichung festgelegt?

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f$$

Kurventyp hängt nur von $b^2 - 4ac$ ab!

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &< 0 \text{ Ellipsen} \\ &> 0 \text{ Hyperbeln} \\ &= 0 \text{ Parabeln} \end{aligned}$$

Eine Koordinatentransformation (Translation und Drehung) bringt die Kurven in die gewohnte Hauptlagenform!

Klassifikation der LPDG 2. Ordng.

Lineare PDG 2. Ordnung

$$Au_{xx} + Bu_{xt} + Cu_{tt} + Du_x + Eu_t + Fu = G$$

Klassifikation

$B^2 - 4AC$	Typ der LPDGL
< 0	elliptisch
$= 0$	parabolisch
> 0	hyperbolisch

Eine Variablentransformation ganz analog zur Koordinatentransformation bei algebr. Kurven 2. Ordnung bringt die Gleichungen auf Standardform!

Die prototypischen LPDG 2. Ordnung

Jede LPDG der Form $Au_{xx} + Bu_{xt} + Cu_{tt} + Du_x + Eu_t + Fu = G$ lässt sich durch Variablentransformation auf eine der folgenden Formen bringen.

$$
\begin{aligned}
u_{xx} + u_{yy} &= f & &\text{elliptisch: Laplace-, Poissongleichung.}\\
u_{tt} &= c^2 u_{xx} & &\text{hyperbolisch: Wellengleichung.}\\
u_t &= a u_{xx} & &\text{parabolisch: Wärmeleitungsgleichung.}
\end{aligned}
$$

Die verschiedenen Typen beschreiben völlig unterschiedliche Vorgänge. Sie brauchen unterschiedliche Arten von Randbedingungen. Es gibt jeweils unterschiedliche Lösungsverfahren.

Die prototypischen LPDG 2. Ordnung

Jede LPDG der Form $Au_{xx} + Bu_{xt} + Cu_{tt} + Du_x + Eu_t + Fu = G$ lässt sich durch Variablentransformation auf eine der folgenden Formen bringen.

$u_{xx} + u_{yy} = f$	elliptisch: Laplace-, Poissongleichung.
$u_{tt} = c^2 u_{xx}$	hyperbolisch: Wellengleichung.
$u_t = au_{xx}$	parabolisch: Wärmeleitungsgleichung.

Die verschiedenen Typen beschreiben völlig unterschiedliche Vorgänge. Sie brauchen unterschiedliche Arten von Randbedingungen. Es gibt jeweils unterschiedliche Lösungsverfahren.

$\approx$ 1800–1920 waren im Wesentlichen diese drei Gleichungstypen (zusammen mit PDGs erster Ordnung) theoretisch untersucht und verstanden. Viele aktuelle Anwendungen (Strömung, Festigkeit. . .) formulieren PDGs, die nicht so direkt in dieses einfache Klassifikationsschema passen.